



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**La pendiente de la recta como una razón de cambio para aproximarse al
concepto de derivada**

Tatiana Andrea Ossa Zapata

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2018

**La pendiente de la recta como una razón de cambio para aproximarse al
concepto de derivada**

Tatiana Andrea Ossa Zapata

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Diego Esteban Agudelo Suárez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2018

Resumen

El presente trabajo se realizó mediante una secuencia didáctica utilizando las fases de apertura, desarrollo y cierre que propone Diaz-Barriga (2013), con la implementación de un Pre-test, 6 sesiones, y un Pos-test bajo la perspectiva de las representaciones semióticas de Duval (1992), en la cual los estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Bello Oriente se aproximan al concepto de derivada por medio de diferentes registros matemáticos (tabular, algebraico, gráfico, entre otros), de la pendiente de una recta como razón de cambio, valiéndose del apoyo de las TIC (GeoGebra, Boliche Matemático y Excel) como medio para visualizar, representar e interactuar con los objetos matemáticos.

Palabras clave: Registros, Derivada, Razón de cambio, Representaciones, Pendiente de la recta, Secuencia didáctica, TIC.

Abstract

This project was applied based on a perceptive sequence and by using some opening stages, the development and ending that are proposed by Diaz-Barriga (2013), the intervention was applied for the Pre-test, in the following six sessions and the Pos-test. This project was also applied based on semeiotics perspectives from Duval (1992), where students of 11th grade from Institucion Educativa Bello Oriente had the chance to be close to the concept of math derivative trough many math (notes or registers such as tabular, algebraic, graphing, among others). From the slope of a linear function. This goal was achieved by using some tics tools such as GeoGebra, Boliche Matemático y Excel. These tools helped students to see, represent and interact with math objects.

Keywords: Records, Derivative, Reason for change, Representations, Slope of the line, Didactic sequence, ICT

Contenido

Resumen	V
Contenido	VI
Lista de figuras.....	VIII
Lista de tablas	IX
Introducción	X
1. Capítulo I. Diseño Teórico	122
1.1. Selección y delimitación del tema	122
1.2 Planteamiento del problema	122
1.2.1 Descripción del Problema.....	122
1.2.2 Formulación de la pregunta	15
1.3 Justificación	155
1.4 Objetivos.....	177
1.4.1 Objetivo General.	177
1.4.2 Objetivos Específicos.....	177
1.5 Marco Referencial	19
1.5.1 Referente Antecedentes.....	19
1.5.2 Referente Teórico.	21
1.5.3 Referente Conceptual-Disciplinar.	28
1.5.4 Referente Legal.....	36
1.5.5 Referente Espacial.....	37
2. Capítulo II. Diseño Metodológico:.....	399
2.1 Enfoque.....	399
2.2 Método	399

2.3 Instrumentos de recolección de información y análisis de información ...	411
2.4 Población y Muestra	422
2.5 Delimitación y alcance.....	422
2.6 Cronograma.....	433
3. Capítulo III. Sistematización de la intervención.....	477
3.1 Diseño de la secuencia didáctica	47
3.2 Resultados y análisis de la intervención	533
3.3 Conclusiones y Recomendaciones	788
3.3.1 Conclusiones.	788
3.3.2 Recomendaciones.	80
Referencias	822
A. Anexo: ¿Y si jugamos boliche matemático?.....	855
B. Anexo: Derribar bolos se vuelve una recta.	877
C. Anexo: Subiendo y bajando por la pendiente de una recta.	90
D. Anexo: Intercambiando razones de bombillas.....	91
E. Anexo: La pendiente de la recta como razón de cambio.	93
F. Anexo: ¿Y si nos acercamos hasta el límite?	97
G. Anexo: Pre-test.....	99
H. Anexo: Pos-test	102
I. Anexo: Representación algebraica.....	103
J. Anexo: Representación lenguaje común.	104
K. Anexo: Representación aritmética.....	105
L. Anexo: Conversión del registro tabular al registro gráfico.....	105
M. Anexo: Covariación.....	107
N. Anexo: De la razón de cambio a la pendiente de una recta.....	107

Lista de figuras

Figura 1-1. Ejemplo de rúbrica analítica.....	288
Figura 1-2. Ejemplos de recta.	333
Figura 1-3. Ejemplos de secantes.....	333
Figura 1-4. Ejemplo de recta tangente a una curva.	34
Figura 1-5. Ejemplo de pendiente de una recta.	34
Figura 3-1. Juego Boliche Matemático.....	48
Figura 3-2. Guía: Derribar bolos se vuelve una recta.....	49
Figura 3-3. Guía: La pendiente de la recta como razón de cambio.....	51
Figura 3-4. Gráfico: Indicador de pareja ordenada.....	544
Figura 3-5. Gráfico: Indicador de pendiente de la recta.	55
Figura 3-6. Gráfico: Indicador de razón de cambio.	56
Figura 3-7. Gráfico: Indicador de variable dependiente e independiente.	577
Figura 3-8. Gráfico: Indicador de función.	58
Figura 3-9. Gráfico: Tipos de representaciones que hacen los estudiantes.....	60
Figura 3-10. Gráfico: Conversiones de una representación a otra.....	61
Figura 3-11. Gráfico: Cambios en la pendiente de una recta.	63
Figura 3-12. Gráfico: Pendiente de la recta y razón de cambio.	64
Figura 3-13. Gráfico: Tratamiento y conversión entre la pendiente de la recta y la razón de cambio.....	655
Figura 3-14. Gráfico: Conceptos básicos para aproximarse el concepto de derivada. .	67
Figura 3-15. Gráfico: Indicador de recta tangente.....	69
Figura 3-16. Gráfico: Indicador de función.	70
Figura 3-17. Gráfico: Indicador de pendiente de la recta.	71
Figura 3-18. Gráfico: Indicador de razón de cambio.	72
Figura 3-19. Gráfico: Indicador de variable dependiente e independiente.....	73
Figura 3-20. Gráfico: Indicador de covariación.....	73
Figura 3-21. Gráfico: Indicador de límite.	74
Figura 3-22. Gráfico: Comparativo de aciertos entre el Pre-test y el Pos-test.....	76
Figura 3-23. Gráfico: Comparativo de desaciertos entre el Pre-test y el Pos-test.....	76

Lista de tablas

Tabla 1-1 Ejemplo de registros y representaciones.	22
Tabla 1-2 Ejemplo de conversión de registros.	23
Tabla 1-3 Ejemplo de variable dependiente e independiente.....	31
Tabla 1-4 Normograma.	366
Tabla 2-1 Planificación de actividades.	433
Tabla 2-2 Cronograma de actividades Semestre 1-2017.....	455
Tabla 2-3 Cronograma de actividades Semestre 2-2017.....	455
Tabla 2-4 Cronograma de actividades Semestre 1-2018.....	46
Tabla 3-1 Rúbrica de Pre-test.	53
Tabla 3-2 Rúbrica de ¿Y si jugamos boliche matemático?	597
Tabla 3-3 Rúbrica de Jugar bolos se vuelve una recta.	609
Tabla 3-4 Rúbrica de Subiendo y bajando por la recta.	62
Tabla 3-5 Rúbrica de Intercambiando razones de bombillas.	63
Tabla 3-6 Rúbrica de La pendiente de la recta como razón de cambio.	655
Tabla 3-7 Rúbrica de ¿Y si nos acercamos al límite?	666
Tabla 3-8 Rúbrica de Pos-test.....	68
Tabla 3-9 Rúbrica de Pre-test Vs. Pos-test.	75

Introducción

El desarrollo de la matemática ha estado, desde su inicio, profundamente unido al avance del cálculo. En la actualidad se puede decir que la mayoría de las manifestaciones del universo y la transformación constante de las mismas se pueden modelar. Esto sucede porque la medición de estas transformaciones está basada en la variación y la noción de derivada, es por esta razón que uno de los propósitos que se debe implementar en la educación matemática es la de desarrollar en los estudiantes las competencias necesarias para comprender y representar el mundo cambiante que los rodea.

Dichas representaciones presentan dificultades en los estudiantes al momento en que se enfrentan a este tipo de situaciones de cambio, estas dificultades no solo están presentes en los estudiantes de la educación media sino también en los estudiantes de la educación superior debido a que la manipulación de los conceptos centran su interés en un solo registro de representación y a propósito de esto Duval (1992) indica que entre más registros de representación se posean de un concepto mayor será su comprensión de dicho concepto; además las TIC aparecen como el mediador elegido para que los estudiantes puedan realizar observaciones y análisis haciendo uso de diferentes registros, como tabular, gráfico, algebraico, entre otros.

En este trabajo se propone una secuencia didáctica para acercar a los estudiantes del grado once de la Institución Educativa Bello Oriente, al concepto de derivada a partir de la pendiente de una recta como razón de cambio, a través de la teoría de las representaciones semióticas de Duval (1992) y el uso de las TIC, por medio de una secuencia didáctica desde la perspectiva de Díaz-Barriga (2013).

Este documento presenta la siguiente estructura, en el capítulo I se encuentra todo el planteamiento del problema con su justificación y objetivos a desarrollar durante la secuencia didáctica, además del referente teórico sobre el que se sustenta el siguiente trabajo que está soportado en las representaciones semióticas, así como el uso de las TIC y toda la base conceptual matemática sobre la cual se va a trabajar.

El capítulo II cuenta con el diseño metodológico enmarcado en el enfoque crítico social, dado que permite hacer uso de herramientas cuantitativas y cualitativas para la recolección de la información, además, una de sus características fundamentales es que posibilita llevar a cabo procesos de autorreflexión, que generan cambios y transformaciones de los sujetos de estudio, a nivel social y educativo; para recolectar la información se obtuvo en primera instancia por medio del contacto directo con los estudiantes y se propusieron como instrumentos, la observación, guías, Pre-test, hipermediales, multimediales y Pos-test.

Finalmente, en el último apartado se encuentran las intervenciones realizadas, las conclusiones, recomendaciones y las referencias.

1. Capítulo I. Diseño Teórico

1.1. Selección y delimitación del tema

Diseño de una secuencia didáctica que contribuya a la enseñanza del concepto de derivada a partir de la pendiente de una recta como razón de cambio mediada por las TIC, para que por medio de simulaciones en GeoGebra puedan realizar las transformaciones en los diferentes registros semióticos como lo son el tabular, el algebraico, el icónico y el gráfico y luego poder hacer conversiones de un registro a otro como se proponen en la teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval, todo esto para comprender los diferentes elementos que hacen parte del concepto en situaciones de variación.

1.2 Planteamiento del Problema

1.2.1 Descripción del Problema.

Todo alrededor de cada ser vivo del planeta está en constante cambio, tal como cuando sube y baja la marea, el cambio en las estaciones, la temperatura del día, los eclipses, en otras palabras, todo a través del tiempo, se transforma. De este modo, puede decirse que el entorno cambia continuamente aunque en muchas ocasiones no se perciba, y el ser humano no está alejado de esto, su forma de trabajar, vivir, la industria, el transporte, la comunicación, la economía, cuando se pateo un balón, cuando se lanza un proyectil, etc., demuestra como los cambios intervienen y permean cada aspecto por más cotidiano que parezca.

Es así como las matemáticas, a lo largo del tiempo han tratado de crear modelos que permitan describir cambios. De ahí que sea importante señalar que la medición de estos cambios es la base de la variación y el pilar del concepto de derivada, dado que esta facilita representar y predecir la variación en los fenómenos no solo de la naturaleza sino de otras ciencias, a propósito de esto Engler y Camacho (2002), afirman que:

“La medición del cambio ha estado estrechamente ligada con la idea de variación -aspecto esencial y eje central en la formación del concepto de derivada-. En el aula de matemática, el cálculo permite explorar la naturaleza del cambio y del movimiento y proporciona herramientas como la razón de cambio, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, etc., y un lenguaje para lograrlo. Brinda la posibilidad de crear modelos matemáticos para describir los fenómenos asociados al cambio y la medición de la variación, como por ejemplo la difusión de calor sobre algún objeto, la vibración, etc.” (pág. 18)

Además, en relación a esto, se promueve en los documentos rectores de la educación matemática en Colombia, Estándares (2003) y DBA (2016), la necesidad de que los estudiantes interpreten el concepto de derivada, no solo como una razón de cambio sino como valor de la pendiente, éste como uno de los objetivos del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos en grado 11.

Es así como la Institución Educativa Bello Oriente en su currículo sigue los estándares y los DBA y por ello este objetivo que involucra el concepto de derivada se encuentra en su currículo y se han observado dificultades por parte de los estudiantes para su comprensión, evidenciando que algunos estudiantes adquieren el algoritmo para derivar, pero no explican el concepto y no lo aplican en situaciones de la vida real; probablemente esta dificultad se dé por el alto nivel del concepto o a las metodologías implementadas por los docentes, esto se argumenta en los bajos resultados obtenidos en las pruebas institucionales y pruebas externas, como son: pruebas de periodo, simulacros y pruebas SABER 11 (2016).

Así mismo, en las Institución se comprueban dificultades para comprender y transformar la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos como tablas y gráficos, además de validar procedimientos y estrategias matemáticas para dar soluciones adecuadas a problemas de cambio que involucran el concepto de derivada.

Además, la no comprensión del concepto, según se observa se debe a que su enseñanza se centra en la memoria, la mecanización y los textos se basan en la forma algebraica para resolver una derivada y no se asocian otras representaciones, al respecto de esto, Engler y Camacho (2002) citando a Moreno, describen como *“problemática”* la enseñanza de las bases del cálculo, debido a que se puede enseñar a resolver problemas de forma mecánica pero se encuentra alejada esta enseñanza de lo que se supone una *“verdadera comprensión de los conceptos”*.

Se puede entonces concluir que las dificultades en el concepto de derivada se centran en que no se presentan diferentes representaciones del concepto, resumiendo su solución a una conexión mecánica de pasos en la que no se razona cada transformación realizada en el registro algebraico, que sería el más común en la enseñanza del concepto, y mucho menos se avanza hacia la conversión en otros registros, por lo que posiblemente las TIC sean las que viabilicen estas transformaciones y conversiones propuestas por Duval (1992) para la comprensión de dicho concepto, por lo que se deben buscar estrategias didácticas que busquen impactar la enseñanza del concepto de derivada tomando como punto de partida las representaciones semióticas de la pendiente de una recta y las TIC como mediador para manipular los conceptos.

1.2.2 Formulación de la pregunta.

- ¿Qué estrategia didáctica contribuirá a la enseñanza del concepto de derivada, a partir de las representaciones de la pendiente de una recta como razón de cambio con el uso de las TIC?

1.3 Justificación

A lo largo de la historia se ha trabajado en la enseñanza de las matemáticas, tratando de disminuir o tal vez vencer las dificultades que se presentan en los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos.

Es evidente en mi labor docente en el grado 11 de la Institución Educativa Bello Oriente cuando se le presentan situaciones de cambio a los estudiantes, se pueden apreciar las dificultades en los bajos resultados de las pruebas realizadas en la Institución y en pruebas externas, es así como este trabajo se encuentra enmarcada dentro del pensamiento variacional como se dispone en los Lineamientos, Estándares y DBA, puesto que es el encargado de las situaciones que presentan cambios y análisis de patrones en matemáticas, además del estudio del álgebra; dentro de este amplio campo se encuentra el concepto de derivada, el cual se adopta debido a las dificultades de su comprensión buscando que los estudiantes logren su aprendizaje a través de las diferentes representaciones matemáticas que se pueden generar.

Pero no solo se encuentran dificultades en la secundaria, en las universidades también se visualizan rendimientos académicos bajos en cálculo diferencial por parte de los estudiantes que terminan por desertar de las carreras, la Universidad de Antioquia en su grupo Ingeniería y Sociedad (2010), desarrolló un estudio acerca de

cómo algunas materias inciden en estos rendimientos bajos que terminan afectando los índices de deserción, en dicho informe concluyen:

[...] lo cual se ha traducido en una pronunciada disminución de los estudiantes que ganan el curso, que han pasado de cifras superiores al 60% a porcentajes cercanos al 40%, lo cual, como ya se ha mencionado, es una señal muy inquietante sobre el grado de compromiso que los estudiantes tienen con el estudio, o de las dificultades crecientes que encuentran en su estudio del Cálculo, por razones que deben dilucidarse. (pág. 7)

Ahora bien, en los Lineamientos curriculares para matemáticas propuestos por el MEN (1998) se encuentra,

“[...] las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar” (pág. 18).

Es por esto que se requiere el aprovechamiento de la digitalidad como medio de contribución a la enseñanza, en este caso específico, de las matemáticas, en especial en temas que vienen presentando dificultades tanto para su enseñanza como para su aprendizaje, en este caso el de la derivada. Además, en la actualidad, con la llegada de la era de información y el auge tecnológico la sociedad se actualiza y desarrolla de forma acelerada y los docentes no pueden ignorar esta nueva configuración social, en donde el ciudadano moderno establece relaciones dinámicas mediadas por las TIC y demanda nuevas posibilidades de adquirir conocimiento.

El objetivo es el de utilizar las TIC con una intencionalidad clara, aprovechando las ventajas que ofrecen para mostrar otras alternativas que lleven a la construcción del conocimiento, para representar las situaciones, en este caso de las matemáticas, de forma más real, al igual que poder manipular de forma digital la pendiente de una recta y analizar lo que sucede en ella para luego avanzar hacia la comprensión de la derivada. Es así como, el trabajo de intervención pretende contribuir a mejorar la

calidad de la educación y la didáctica de las matemáticas, por lo que, se plantea otra alternativa, en este caso las TIC para generar espacios de intercomunicación, organizar las estructuras de las clases, orientar el proceso individual y colectivo del estudiante, promover una participación activa en la construcción del aprendizaje, facilitar la forma de aprender, motivar el proceso autónomo y crear entornos de aprendizaje.

En este trabajo final se integra el concepto de derivada a partir de la pendiente de una recta como razón de cambio con el pensamiento variacional a través de la variación, apoyados con la teoría de las representaciones semióticas de Raymon Duval (1992), en la cual se expresa que a través de la coordinación entre diversos registros de representación es donde se adquiere el conocimiento; es así como se pretende potenciar la enseñanza del concepto derivada para los estudiantes de la Institución Educativa Bello Oriente, para que a partir de las TIC se propicien herramientas para la creación de diferentes registros que van surgiendo en el desarrollo de una secuencia didáctica.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General.

Diseñar una secuencia didáctica que contribuya a la enseñanza del concepto de derivada a partir de las representaciones de la pendiente de una recta como razón de cambio con el uso de las TIC en el grado undécimo de la Institución Educativa Bello Oriente.

1.4.2 Objetivos Específicos.

- Identificar la problemática alrededor de la comprensión del concepto de derivada, las teorías del aprendizaje y las TIC través de un Pre-test que sirva como diagnóstico del grupo a intervenir sobre los conocimientos que poseen los estudiantes.
- Diseñar actividades que conformen una secuencia didáctica por medio de las representaciones semióticas de Duval haciendo uso de las TIC para la enseñanza del concepto de derivada.
- Aplicar la secuencia didáctica para la aproximación al concepto de derivada, mediante las representaciones de la pendiente de una recta como razón de cambio.
- Evaluar la incidencia de la secuencia didáctica en la enseñanza del concepto de derivada y su comprensión mediante distintas representaciones matemáticas.

1.5 Marco Referencial

1.5.1 Referente Antecedentes.

La recopilación de los textos revisados tienen características como, tener el concepto de derivada, contribuir a la enseñanza de las matemáticas y posiblemente ser abordados por medio de las TIC.

En esta exploración se encuentra en el 2003, en México a María Raquel Mendoza Gómez quien por medio de su trabajo *“Representaciones de la derivada de una función”* presenta el análisis realizado a la aplicación de una secuencia didáctica, en donde se buscaba observar cómo el alumno puede identificar la función en las distintas representaciones algebraica, numérica y gráfica de la primera y segunda derivada, cuyos resultados arrojaron que los estudiantes para darles solución a las actividades presentadas, se valieron de la representación algebraica y no asocian las demás representaciones que son fundamentales para la adquisición del concepto.

Desde otra perspectiva, en el 2012, Oscar Eduardo Vidal Rojas, en su trabajo *“Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos”*, publicado en la ciudad de Bogotá, mencionaba que profundizar en el análisis histórico y didáctico del concepto de derivada como rapidez de variación, permitía formular una propuesta didáctica que aproximara al educando en la noción de derivada.

Durante este mismo año (2012), en Argentina, Adriana Engler & Alberto Camacho, escribieron un artículo titulado *“Una mirada investigaciones sobre la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional”* en el cual describen los problemas encontrados en las investigaciones para la comprensión del concepto de derivada, así como las metodologías utilizadas para tratar de minimizar los obstáculos

que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de la derivada, además, presentan los resultados obtenidos después de la implementación de dichas metodologías.

Luego en el 2013, Carlos Eduardo Pineda Ruiz en su tesis presentada en Bogotá, *“Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de derivada en el último grado de educación secundaria”*, trabajada a través de cuatro ejes, expone en el primer eje la historia y los mayores exponentes que abordaron el concepto de derivada; en el segundo eje, se presentan los conocimientos previos que debe tener un estudiante para la aprehensión del concepto a través de la relación entre la razón de cambio y la pendiente de una recta; en el tercer momento, se desarrolla la parte disciplinar del concepto y finalmente, se exponen diferentes actividades para que los estudiantes se apropien del concepto.

Posteriormente en el *“Libro- Taller para la enseñanza del concepto de derivada en el grado 11° (UN ENFOQUE GEOMÉTRICO)”*, publicado en Medellín en el 2014, la autora Paula Andrea Barrientos Tascón, propone incrementar las habilidades de los estudiantes a través de una secuencia de talleres en donde dichos estudiantes son los ejes centrales y el docente es el encargado de dosificar el trabajo en el aula; así de esta forma se presenta como una herramienta para la enseñanza de la derivada bajo la perspectiva del aprendizaje significativo de Moreira.

Después de realizar la búsqueda de los trabajos anteriormente descritos se llega a la conclusión de diseñar un trabajo final que además de tener los elementos característicos, también cuente con una secuencia de conceptos previos como recta, pendiente de una recta, razón de cambio y funciones, para aproximarse al concepto de derivada a través de las diferentes representaciones semióticas como propone Duval (1992), siendo estas complementadas por las TIC.

1.5.2 Referente Teórico.

Platón (427- 347 a.C.) argumentó que el conocimiento tiene dos dimensiones inseparables, una es la opinión del sujeto, en donde las cosas pueden ser o no ser y es el sujeto quien crea una imagen que se asemeja a la realidad (apariencia); y la otra dimensión es la razón, sólo con la inteligencia se puede captar este conocimiento, que se llama idea y es lo que normalmente se denomina como realidad.

Cuando un matemático estudia un objeto usa suposiciones para llegar a la verdad, es decir, que cuando piensa en un triángulo sólo tiene una imagen que representa la idea, así los objetos de las matemáticas son intocables porque no son materiales, están alejados de lo físico, indeformables y por supuesto, por ellos no pasa el tiempo; para trabajar con ellos, se crea una imagen que se puede tocar, rayar, mover, trasladar; dicho de otro modo, se utilizan modelos para poder representar lo que está en nuestra mente; y aunque la imagen tangible se dañe con el paso del tiempo la idea permanece.

Debido a que los objetos en matemáticas no son físicos, para su estudio y utilización se debe recurrir a distintas representaciones, que no son el objeto matemático pero que ayudan a su comprensión, por esto, se fundamenta este trabajo en la teoría de registros de representación semióticos, pues establece diversas representaciones como números, símbolos, gráficos, dibujos, y todas las formas posibles de representación, que cumplen funciones de comunicación (para exteriorizar la idea), objetivación (necesaria para la actividad matemática) y tratamiento de los conceptos matemáticos.

Dicha teoría, cuyo exponente es Raymond Duval (1992), el cual sustentado en (Kaput, 1987) establece que: *“los conceptos matemáticos son abstractos y no se puede acceder a ellos sino a través de un sistema de representación”*, además afirma que: *“los diferentes registros de representación juegan un papel fundamental en la comprensión de los objetos matemáticos y por tanto en el aprendizaje de estos”*.

La adquisición conceptual sobre el objeto matemático según Duval, tiene su fundamento en la representación, existiendo dos, la representación mental y la semiótica. En la primera, caben todas las conceptualizaciones, creencias, imágenes, modelos, etc., que cada sujeto posee sobre un objeto. Mientras que en la segunda, esas representaciones se vuelven visibles por medio de signos y se pueden comunicar. En esta última, Duval propone tres actividades cognitivas, la formación, el tratamiento y la conversión; en el siguiente ejemplo sobre el concepto de derivada, se tiene:

Formación: Posee varios registros semióticos, que a su vez poseen representaciones semióticas, aquí el sujeto es capaz de expresar un objeto matemático como una representación en cualquier sistema. En la Tabla 1-1 puede observarse los diferentes registros con algunas posibles representaciones.

Tabla 1-1 Ejemplo de registros y representaciones.

Registro r^1 : lenguaje común	Registro r^2 : Icónico	Registro r^3 : lenguaje algebraico	Registro r^4 : Gráfico
Representación R_1^1 : Ana infla un globo	Representación R_1^2 : 	Representación R_1^3 : $\frac{dx}{dt}$	Representación R_1^4: 

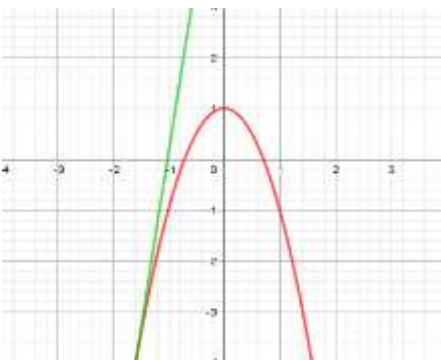
Fuente: Elaboración del autor

Tratamiento: Son las transformaciones que se hacen al interior del sistema, puesto que cada uno tiene sus propias reglas: Dada la función $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, se tiene

$f'(x) = 6x - 5 \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1 - 3x^2 + 5x - 1}{h}$. Estas representaciones son equivalentes dentro del registro semiótico de lenguaje algebraico.

Conversión: Son las transformaciones que se hacen de un sistema a otro sin cambiar de objeto para así lograr explicitar otras características, en la Tabla 1-2 se puede observar como un registro algebraico puede ser transformado en un registro gráfico y son equivalentes.

Tabla 1-2 Ejemplo de conversión de registros.

Registro r^1 : lenguaje algebraico	Registro r^2 : Gráfico
Representación R_1^3 : $f(x) = -2x^2 + 1$	Representación R_1^4: 

Fuente: Elaboración del autor

Duval citado por el MEN (2003), establece que es fundamental para poder acceder a la comprensión del concepto esta transformación, “Si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que el autor llama <<Registros de representación>> o <<registros semióticos>>, no parece posible aprender y comprender dicho contenido” (pág. 54), por lo que puede afirmarse que la coordinación entre diversos registros de representación, en donde se pueden realizar tratamientos y conversiones es donde se adquiere el conocimiento.

Así, el concepto de derivada puede ser representado mediante diversos registros, en el lenguaje común a través de una situación, en donde se puede observar que las magnitudes de volumen y radio cambian con el tiempo. En el algebraico, en donde una derivada puede ser expresada mediante una expresión algebraica para poder modelar una situación del lenguaje común y darle solución, concluir o replantear. En el icónico, en el cual se puede bosquejar la situación que se presenta y comprenderla para su posterior solución. Y finalmente, el gráfico, que puede ser representado en el plano cartesiano.

Por esto para lograr la adquisición de este conocimiento se propone una secuencia didáctica quien según Buitrago & otros (2009), citando a Camps la define como: *“la estructura de acciones e interacciones relacionadas entre sí, intencionales que se organizan para alcanzar un aprendizaje”* (pág. 16); es así como dicha secuencia organiza las interacciones de los estudiantes con los conceptos, donde el docente es un sujeto activo y aprovecha el contenido de forma rigurosa para favorecer su enseñanza, direccionando la secuencia según su ruta trazada y propiciando en los estudiantes, según Díaz-Barriga (2013),

[...] la manera como recupera las nociones que estructuran sus respuestas, la forma como incorpora nuevas nociones, mediante múltiples operaciones intelectuales tales como: hallar relaciones con su entorno, recoger información, elegir, abstraer, explicar, demostrar, deducir entre otras, en la gestación de un proceso de aprender. El alumno aprende por lo que realiza, por la significatividad de la actividad llevada a cabo, por la posibilidad de integrar nueva información en concepciones previas que posee, por la capacidad que logra al verbalizar ante otros (la clase) la reconstrucción de la información. (pág. 1)

Esta secuencia didáctica necesita de software especializados, cuestionarios, actividades, y test, donde a través de preguntas se direcciona al estudiante a las representaciones del concepto en diversos registros y le faciliten el avance hacia el tratamiento y la conversión entre dichos registros; es así como se requiere la estructura de una secuencia, que según Díaz-Barriga (2013) propone:

“La secuencia didáctica es el resultado de establecer una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí, con ello se parte de la intención docente de recuperar aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho, vincularlo a situaciones problemáticas y de contextos reales con el fin de que la información que a la que va acceder el estudiante en el desarrollo de la secuencia sea significativa, esto es tenga sentido y pueda abrir un proceso de aprendizaje, la secuencia demanda que el estudiante realice cosas, no ejercicios rutinarios o monótonos, sino acciones que vinculen sus conocimientos y experiencias previas, con algún interrogante que provenga de lo real y con información sobre un objeto de conocimiento”. (pág. 4)

Para lograr esto el autor propone dos líneas, la línea de secuencias didácticas y la línea de evaluación para el aprendizaje; la primera se compone de tres tipos de actividades: apertura, desarrollo y cierre.

Las actividades de apertura tienen como objetivo *“abrir el clima de aprendizaje”*, son actividades de diversas índoles, individuales, grupales, en el salón de clase o en otros espacios, consultas, entrevistas, foros, mapas mentales, discusiones, entre otros.

Después de esta apertura, siguen las actividades de desarrollo, igual que las primeras ofrecen un abanico de posibilidades, exposiciones magistrales del docente sobre los conceptos a abordar, discusiones, videos, se pueden presentar en cualquier espacio, no necesariamente en el salón de clase, su fin es el de lograr una interacción entre los conocimientos previos, la nueva información suministrada y un referente actual.

Finalmente, las actividades de cierre se definen como *“la síntesis del proceso y el aprendizaje desarrollado”*, en concordancia con esto, se busca que el estudiante reorganice los conocimientos previos a partir de las interacciones con la nueva información para posteriormente obtener una reelaboración conceptual.

Ahora, en lo que se refiere a la línea de evaluación para el aprendizaje, debe quedar articulada en la secuencia didáctica, si el docente desea utilizar instrumentos como el examen puede hacerlo, pero en la línea de secuencias didácticas debe estar

inscrita la línea de evaluación por medio de las evidencias como tareas, consultas, desarrollo de guías, reportes, trabajos individuales o grupales, interacciones en plataformas, entre otros; es importante resaltar que dicha evaluación no solo debe ser sumativa sino que el docente debe utilizar esta evaluación de una manera formativa, haciendo uso por ejemplo de la retroalimentación para que los estudiantes puedan realizar ese proceso de argumentación y discusión de los procesos llevados a cabo.

Además, para llevar a cabo la secuencia didáctica se realiza un vínculo con la tecnología como herramienta; según Villarreal (2012), *“la producción de conocimiento se ve condicionada por los medios utilizados”* (pág. 79), es así como define que el proceso de conocer es social (humano) e incluye herramientas, es decir, medios por los cuales se produce el conocimiento y obviamente las matemáticas se produce de igual forma, en la antigüedad para producir el conocimiento geométrico se hizo uso de la regla y el compás como medio para lograrlo, dicho esto, está claro que la tecnología utilizada en la educación viene de tiempos remotos y es tangible en todos los espacios y actividades escolares, desde el uso del tablero, hasta un VideoBeam pueden verse como instrumentos tecnológicos que desempeñan un papel cuyo objetivo es aportar a la transmisión de lo que concebimos como conocimiento.

Estos instrumentos son seleccionados por los docentes para integrarlos al proceso de enseñanza aprendizaje, dado que por medio de estos se pueden representar conceptos que son abstractos, intangibles, porque no son materiales, y por lo tanto, están alejados de lo físico, son ideales, porque están en el pensamiento, son intocables e indeformables; sin embargo, cuando se logra su representación, pueden comunicar a otras personas y por lo tanto a otras mentes, en esta misma línea Villarreal (2012) afirma,

“Es importante destacar que en el ámbito educativo generalmente se trabaja con la coordinación de representaciones numéricas, algebraicas y gráficas. Sin embargo la discusión adquiere nuevos matices cuando las representaciones son producidas por un medio tecnológico a partir de movimientos corporales registrados por dicho medio. Así, se pone de manifiesto la necesidad de coordinación entre los medios y se amplían las posibilidades de visualización ya

que las imágenes kinestésicas se incorporan como nuevas representaciones asociadas a conceptos matemáticos, ampliando las posibilidades de comprensión matemática de un fenómeno real” (pág. 89)

Además, en la guía ser competente propuesta por el MEN (2008) se expone: *“Como actividad humana, la tecnología busca resolver problemas y satisfacer necesidades individuales y sociales, transformando el entorno y la naturaleza mediante la utilización racional, crítica y creativa de recursos y conocimientos” (pág. 5)*, así la era digital es un momento histórico en el que los jóvenes se desenvuelven en un espacio tecnológico, y el docente debe motivar ese desarrollo cognitivo y personal para generar conocimiento y además debe aprovechar las tecnologías disponibles e integrarlas para transmitir la información y convertirse en un guía facilitador del aprendizaje y creador de recursos multimediales que coadyuven al desarrollo de las competencias que propone el MEN.

Ahora para poder analizar los resultados obtenidos en la secuencia didáctica se hace uso de rúbricas de evaluación, según Alsina & otros (2013), definida como:

“Un instrumento cuya principal finalidad es compartir los criterios de realización de las tareas de aprendizaje y de evaluación con los estudiantes y entre el profesorado. La rúbrica, como guía u hoja de ruta de las tareas, muestra las expectativas que alumnado y profesorado tienen y comparten sobre una actividad o varias actividades, organizadas en diferentes niveles de cumplimiento: desde el menos aceptable hasta la resolución ejemplar, desde lo considerado como insuficiente hasta lo excelente.” (pág. 8)

Estos mismos autores indican que existen dos clases de rúbricas, holísticas en donde la actividad es un todo inseparable y las analíticas en donde se evalúa cada parte de la actividad por separado; para este trabajo se tomarán las holísticas debido a que permite analizar las respuestas de los estudiantes involucrados a la luz de los conceptos básicos que se requieren para aproximarse al concepto de derivada, como pendiente de una recta, variable, razón de cambio, función; todos ellos de forma separada para luego formar un todo más complejo que se distribuye de forma gradual,

a propósito de ello, Alsina & otros (2013), proponen un ejemplo de rúbrica analítica (pág. 9) que se puede observar en la Figura 1-1.

Figura 1-1. Ejemplo de rúbrica analítica.

Con relación a...	0	1	2	3	4	5	6
Estructura	No lo hace.	Lo hace con errores sustanciales.	Lo hace con algún error.	Lo hace correctamente.	Lo hace notablemente.	Lo hace excelentemente.	Lo hace ejemplarmente.
Contenido	No lo hace.	Lo hace con errores sustanciales.	Lo hace con algún error.	Lo hace correctamente.	Lo hace notablemente.	Lo hace excelentemente.	Lo hace ejemplarmente.
Aspectos formales	No lo hace.	Lo hace con errores sustanciales.	Lo hace con algún error.	Lo hace correctamente.	Lo hace notablemente.	Lo hace excelentemente.	Lo hace ejemplarmente.

Fuente (Alsina, 2013)

1.5.3 Referente Conceptual-Disciplinar.

Desde la historia se evidencia como las matemáticas han encontrado dificultades, conflictos y frustraciones que enfrentaron aquellos que iniciaron su estudio. Esto dado que entre los conceptos, el lenguaje y otras características propias de esta área hicieron que el camino fuera largo y arduo; pero estas matemáticas de carácter riguroso, de las que ayer se ocuparon los sabios y hoy se ocupan los matemáticos puros son presentadas como estáticas y complejas, y son presentadas de esta forma en la escuela; pero la realidad es otra, las matemáticas se constituyen en una de las grandes manifestaciones del pensamiento, con ella se unen el conocimiento y la

cultura, hecho que evidencia su relación con filosofía, arte, religión, política, literatura, poesía, y por supuesto con la educación, entre otras.

Esta realidad se refiere a que las matemáticas que son enseñadas en la escuela continúan siendo elevadas, por lo que se propone vivenciar y hacer uso de la ejercitación a través del pensamiento variacional y las diferentes representaciones del concepto de derivada para darle el carácter de dinámicas a las matemáticas y su conexión con el mundo, debido a que en dicho mundo todo está en constante cambio, es importante resaltar que la derivada facilita representar y predecir la variación en los fenómenos no solo de la naturaleza sino de otras ciencias, se puede observar en diferentes situaciones que involucran variación en:

- La vida cotidiana sin ser conscientes del concepto de derivada, se está haciendo uso de ella, por ejemplo, al ir en un auto y este acelera, al realizar compras y observar que el precio del producto subió con respecto al mes anterior, etc.
- Medicina, cuando el médico desea conocer el ritmo cardiaco de un paciente mientras realiza un ejercicio físico, analiza el máximo o mínimo de la intensidad con la que va el corazón.
- Matemáticas, al permitir expresar el aumento de una magnitud en relación con otra magnitud.
- Física, al lanzar un cohete se requiere saber la velocidad instantánea y su velocidad después de que ha pasado algún tiempo.
- Ecología, cuando se analiza los huevos de un gusano de manzana, debido que de allí salen larvas podría calcularse el porcentaje máximo a cierta temperatura.

Esto por solo mencionar algunas áreas, pero también se puede utilizar la derivada en química, estadística, economía, arquitectura, electrónica, ingeniería industrial, entre otras; por lo que se resalta su importancia en las ciencias, en matemáticas y en la vida cotidiana.

Dicha esta importancia, la escuela debe responder a este requerimiento, por lo que para introducir al estudiante al concepto de derivada, se inicia con el concepto de razón

de cambio, el concepto de razón los Pitagóricos lo consideraban como la forma de expresar un objeto mediante un número y sus relaciones, es decir una relación denotada como $\frac{a}{b}$ y se lee como “a” es a “b”, según Andonegui (2006), *“Esta relación y su expresión como aparente <<cociente>> de dos números naturales no era considerada como un nuevo número –una fracción, la expresión de una relación parte/todo-, sino como una razón entre ambas magnitudes, es decir, como la expresión numérica de la relación entre ellas, sin que ambas estuvieran necesariamente ligadas como un par <<parte/todo>>...”* (pág. 7)

Ahora bien, la razón de cambio se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra, en donde se da una covariación, según Amaya & otros (2012), entendida esta última como *“la relación entre dos o más variables que al ocurrir cambios en una o algunas, determinan cambio(s) en la(s) restante(s)”* (pág. 39). Se trata de la magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio. En caso de que las variables no estén relacionadas, tendrán una razón de cambio igual a cero.

$$\frac{\text{Cambio en y}}{\text{Cambio en x}} = \frac{\text{Cambio vertical}}{\text{Cambio horizontal}}$$

Según Chala & otros (2016), se puede expresar la razón de cambio como:

$$\frac{y}{x} = R, \text{ donde } R \text{ es la razón de cambio y las letras "x" y "y" son variables (pág. 124)}$$

En este punto, la variable se entenderá según Posada y otros (2006), como *“Un símbolo, usualmente representado por una letra, que da cuenta de cualquier elemento de un conjunto, los cuales son números u otros objetos. A través de ellas es que podemos expresar regularidades presentes en situaciones matemáticas, dar cuenta de diferentes niveles de abstracción y generalidad, operar con lo desconocido como si lo fuera y comunicar matemáticamente, sin el perjuicio de la ambigüedad, relaciones entre los objetos, tanto de las mismas matemáticas como de otras ciencias.”* (pág. 165), de

esta definición resultan dos clasificaciones de las variables: variable independiente y variable dependiente.

La variable independiente, representa una cantidad que se modifica independientemente, en otras palabras, no es afectada por nada ni por la otra variable pero puede variar. Se denota con la letra minúscula “ x ”.

La variable dependiente, representa una cantidad cuyo valor depende de cómo se modifica la variable independiente, es decir, es la que es afectada por la otra variable, su valor depende de los cambios producidos en esta. Se denota con la letra minúscula “ y ”.

A continuación en la Tabla 1-3 se presenta un ejemplo de variable dependiente y variable independiente, el siguiente cuadro muestra un resumen de la población de gallinas que se registró en una finca durante cinco años:

Tabla 1-3 Ejemplo de variable dependiente e independiente.

Año	2013	2014	2015	2016	2017
Población	120	310	96	280	438

Fuente: Elaboración del autor

En esta tabla se pueden observar las variables año y población, la variable independiente es año, porque los años existen independientemente de si hay población de gallinas o no; y la variable dependiente es la población de gallinas porque depende del año en que se esté analizando.

Es de importancia tener en cuenta que el estudiante debe comprender cómo ubicarse en el plano cartesiano, el cual le es atribuido al matemático francés René Descartes (1596-1650), en este plano se ubican parejas ordenadas, según Leithold (1992), *“Dos números reales cualesquiera forman un par (o pareja), y cuando el orden*

del par tiene importancia, se le llama <<par ordenado>>, además, <<cada pareja ordenada>> (x, y) se denomina punto del plano” (pág. 16).

En el ejemplo anterior, considerando que “x” es la variable año y “y” la variable población, se pueden formar las parejas ordenadas (2013, 120); (2014, 310); ... (2018, 438).

Esta relación entre variables se puede expresar como una función, según Hernández (2014), citando a Dirichlet quien define en 1837, el concepto de función en los siguientes términos: *“Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente.”* (pág. 21)

Posteriormente, se le atribuye a Leonhard Euler matemático suizo, la denotación de $f(x)$ para expresar el valor que la función f asocia a la variable “x”.

Esta variación de los valores entre las variables “x” y “y”, que ocurre dentro de las funciones, adicionándole la noción de aproximarse a un número determinado se vincula con el concepto de límite, según Volveras (2015), *“Sea f una función con dominio D <<el límite de $f(x)$ es igual a L cuando x tiende a a >> si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como se quiera) aproximando x a << a >> pero sin igualar a << a >>. Simbólicamente escribimos: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ”* (pág. 31).

Es importante resaltar que el concepto de límite es fundamental en el concepto de derivada, pero no se hará profundidad en él debido que el objetivo en la secuencia didáctica es la aproximación al concepto de derivada y para la fecha de intervención los estudiantes no han abordado estas temáticas, de igual forma se tomará lo que según Mira (2016), retomando a Leibniz se refería al límite, *“Leibniz (1646-1716) a finales del siglo intentó aproximarse al tema mediante a una discusión de <<cantidades infinitamente pequeñas>>, queriendo significar que, aunque no eran cero, ya no podían disminuir más, lo que estaba más cerca del cero”.* (pág. 7)

Así mismo, se tiene el concepto de recta, siendo esta entendida según Barrientos (2014) como “Una línea que se extiende indefinidamente en sentidos contrarios, se acostumbra denotarlas con letras minúsculas o \overleftrightarrow{AB} ” (pág. 28). En la Figura 1-2 se observan ejemplos de recta.

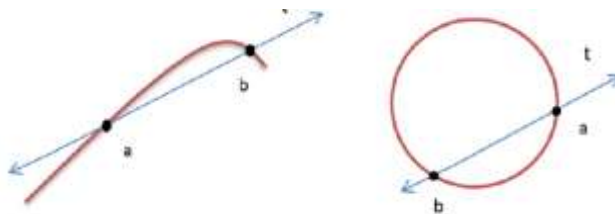
Figura 1-2. Ejemplos de recta.



Fuente: Elaboración del autor

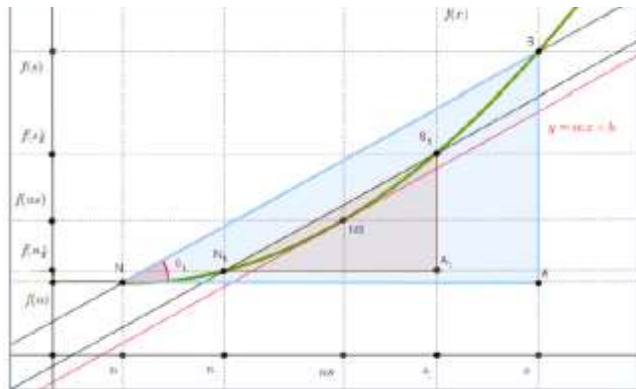
Además, se puede construir una línea recta a partir de dos puntos dados en el plano cartesiano. Entre las diversas clasificaciones que hay de recta, se toman dos: la secante y la tangente. La primera, se define según Barrientos (2014) como: “una línea que localmente interseca en dos puntos a una curva” (pág. 28) . En la Figura 1-3 se observa un ejemplo de secantes.

Figura 1-3. Ejemplos de secantes.



Fuente (Barrientos, 2014)

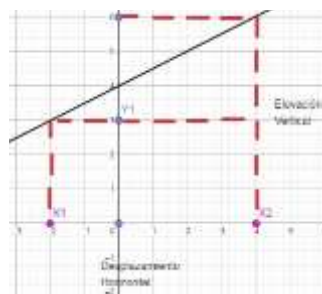
La segunda, Barrientos (2014) define como una recta tangente a una curva en un punto, así: “Es una recta que pasa por el punto y su pendiente es igual a la recta tangente en la posición límite de la secante \overleftrightarrow{NS} ” (pág. 31). En la figura 1-4 se observa un ejemplo de una recta tangente a una curva.

Figura 1-4. Ejemplo de recta tangente a una curva.

Fuente (Barrientos, 2014)

Con esta información se introduce la ecuación que representa una línea recta según Leithold (1992) como, “Al hablar de la ecuación de una recta nos estamos refiriendo a una ecuación que puede ser satisfecha por los puntos de dicha línea, y únicamente por dichos puntos. Puesto que un punto $P_1(x_1, y_1)$ y una pendiente m determinan una recta única, debe ser posible obtener su ecuación.” (pág. 23)

Así pues, para escribir la ecuación de una recta es necesario conocer un punto y su pendiente, esta última es definida por Uni & otros (2011) como, “La inclinación que tiene la recta recibe el nombre de pendiente. La pendiente de una recta es la razón de cambio vertical (elevación) respecto al cambio horizontal (desplazamiento), entre cualquier par de puntos de la recta. Es decir, es el cociente entre el cambio de las coordenadas en el eje y , y el cambio de las correspondientes coordenadas en el eje x ” (pág. 54). En la figura 1-5 se observa un ejemplo de pendiente.

Figura 1-5. Ejemplo de pendiente de una recta.

Fuente: Elaboración del autor

La pendiente m de una recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) distintos es:

$$m = \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \frac{\text{Cambio vertical}}{\text{Cambio horizontal}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{donde } x_1 \neq x_2$$

Luego, al hacer $(x_1, y_1) = (x, y)$ para que satisfaga la condición de ser un punto cualquiera, entonces al sustituir quedaría,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Luego, al realizar la ley uniforme de las igualdades para números reales, se obtiene que $y - y_1 = m(x - x_1)$ que sería la ecuación de la recta cuando se conocen un punto y la pendiente, también es denominada como ecuación punto-pendiente.

Dicho concepto se originó de dos problemas muy diferentes, según Uribe (2011), el primero consistía en “[...] *determinar la recta tangente a una curva en un punto dado*”. El segundo era, “[...] *determinar la velocidad instantánea de un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta*” (pág. 303)

Estos problemas se resolvieron independientemente por dos científicos: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) quien le dio solución el primer problema en 1684, e Issac Newton (1642-1727), quien resolvió el segundo en 1687. Lo prodigioso fue que dos problemas diferentes, tuvieron la misma solución y en dos personajes diferentes.

Leibniz, según Uribe (2011) concluyó que, “*La pendiente de la tangente es el límite de la pendiente de la secante, cuando un punto B se aproxima a un punto A.*” (pág. 305)

$$m(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Por otra parte, Newton citado por Uribe (2011) concluyó que “*Si se toman dos instantes cada vez más cercanos y se determina la velocidad media entre ellos, las velocidades medias se van acercando a un valor y puede calcularse la velocidad en cualquier instante.*” (pág. 317)

$$V(t_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

Después de varias disputas donde Leibniz acusaba a Newton de plagio, se le da a los dos la paternidad del concepto de derivada.

Todos estos conceptos se relacionan para conformar el concepto de derivada, por esta razón forman parte de las guías de la secuencia didáctica.

1.5.4 Referente Legal.

Tabla 1-4 Normograma.

Documento rector	Texto de la norma	Contexto de la norma
Estándares (2003)	<i>“Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.” (pág. 89)</i>	Estas normas sirven como fundamento en la realización de las guías que se realizarán para que puedan dar cuenta de lo que plantea Duval cuando se refiere a Formación, Conversión y
	<i>“Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.” (pág. 88)</i>	
DBA (2016)	<i>“Utiliza instrumentos, unidades de medida, sus relaciones y la noción de derivada como razón de cambio, para resolver problemas, estimar cantidades y juzgar la pertinencia de las soluciones de acuerdo al contexto.” (pág. 82)</i>	Tratamiento de los diversos registros; además de que se encuentra avalada la enseñanza del concepto de Derivada en grado 11, debido a
	<i>“Usa propiedades y modelos funcionales</i>	

	<i>para analizar situaciones y para establecer relaciones funcionales entre variables que permiten estudiar la variación en situaciones intraescolares y extraescolares.” (pág. 86)</i>	que la incluye en los documentos rectores de la educación colombiana, así mismo en el plan de área de la Institución Educativa Bello Oriente.
	<i>“Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas.” (pág. 85)</i>	

1.5.5 Referente Espacial.

La Institución Educativa Bello Oriente se encuentra en el sector de Santo Domingo de la ciudad de Medellín (Carrera 23B N. 84B – 27), es un establecimiento oficial, acogido por la Secretaria de Educación de Medellín hace 2 meses, ya que antes era una sede de la Institución Educativa Reino de Bélgica, pero desde el año 2017 se realizaron los requerimientos para que el Barrio Bello Oriente tuviera su propia Institución; esta nueva Institución se encuentra construida en terrenos privados por lo que no se pueden hacer inversiones y se presentan dificultades como que no cuenta con agua potable, es atravesada por una cañada a la vista que inunda los predios cuando hay época de lluvia, no está rodeada por una malla lo que ha presentado robos de los recursos en repetidas ocasiones, solo cuenta con una vía de acceso, entre otras situaciones.

El plantel es de carácter mixto, brinda educación en los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria, media académica y media técnica, bajo dos modalidades, instalación de redes eléctricas y software. Dicho plantel está conformado aproximadamente por 900 estudiantes, pertenecientes en su mayoría a los estratos 1 y 2, cuya población se caracteriza por tener una diversidad étnica, social y cultural, debido a que las familias en su mayoría son desplazadas de diferentes lugares de Antioquia y Chocó, por esta situación, durante todo el año ingresan estudiantes y desertan otros, lo que ocasiona que no pueda darse continuidad en los procesos y que la educación sea muy flexible.

El deseo del colegio es que los estudiantes ingresen a la educación superior después de terminar el bachillerato como forma de alcanzar sus sueños y puedan aportar a la transformación de la sociedad, pero la realidad es otra y el interés de la comunidad se centra en terminar grado once para conseguir un trabajo y poder contribuir económicamente en sus hogares.

Por lo que además de brindar otra posibilidad para comprender un concepto complejo en matemáticas, como lo es la derivada y puedan alcanzar una de las competencias de grado 11, se pretende, generar una conciencia sobre el ingreso a la educación superior que les ofrezca mejores garantías no solo en la búsqueda de empleos como profesionales sino que sean mejores ciudadanos en miras de contribuir al medio en el que viven, al aportar en la ampliación de sus competencias matemáticas, laborales y ciudadanas.

2. Capítulo II. Diseño Metodológico: Investigación Aplicada

2.1 Enfoque

El presente trabajo final será de corte cualitativo debido a que el objetivo es tratar de comprender en el escenario social y cultural la forma en que los sujetos interactúan en este caso con la aproximación al concepto de derivada, según Sampieri , este enfoque *“Utiliza la recolección de datos sin medición numérica para describir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación”* (2006), por lo tanto es un proceso que usa métodos de recolección no estandarizados y hace uso de observaciones a expresiones verbales y no verbales.

Siempre el hombre en su búsqueda de explicar lo que pasa a su alrededor y su curiosidad innata ha generado en la humanidad el deseo por el conocimiento y la educación no se escapa de dicho deseo, a causa de esto se han elaborado diversas teorías en pro del mejoramiento de los modelos de enseñanza, por lo que para este trabajo se propone la investigación-acción educativa (I-A-E) debido a que ésta para Kemmis (1984) citado por Blasco (2007) es, *“Una forma de indagación autoreflexiva realizada por quienes participan en las situaciones sociales que mejora: prácticas sociales o educativas; comprensión sobre sí mismas; y las instituciones en que estas prácticas se realizan”*, en donde se favorece la actuación del docente y los otros actores educativos ligados a métodos cualitativos.

2.2 Método

Para efectos de este trabajo se propone el método crítico social, debido a que reúne todos los tipos de investigación y posee una mezcla de cualidades cuantitativas y

cualitativas, así como métodos inductivos y deductivos; todo esto es aplicado por el investigador, en este caso el docente, para llevar a cabo el proyecto investigativo deseado; su finalidad es como lo dice Melero (2011), “[...] se caracteriza no solo por indagar y comprender la realidad en la que se inserta la investigación pertinente, sino por provocar transformaciones sociales en ésta, teniendo en cuenta el aspecto humano de la vida social”. (pág. 343)

Para poder lograr el objetivo de este método, el docente debe procurar no solo compartir con los individuos presentes en la investigación sino que debe lograr que estos se comprometan con dicha investigación de manera dinámica, que sean sujetos activos para que la investigación además de hacer parte del plano pedagógico también haga parte de su vida y se pueda generar una transformación que contribuya a su comunidad y de esta forma en la sociedad, lo que requiere de una autorreflexión de la práctica que genere cambios a nivel social y educativo.

Este método está basado en cuatro fases:

La 1ª fase: el diagnóstico; consiste en identificar el problema, delimitar el tema, planteamiento del problema y formulación de la pregunta, revisión del material educativo disponible del concepto de derivada, utilización de las TIC, teorías del aprendizaje, además de documentos reglamentarios según la ley educativa colombiana, además de la descripción de los objetivos general y específicos que orientan el trabajo final de profundización.

En la 2ª fase: la elaboración de un plan de acción, corresponde al diseño de una secuencia didáctica con actividades educativas secuenciales de enseñanza como guías, talleres, interacción con TIC y evaluaciones (Pre-test y Pos-test) que determinen el nivel al iniciar y al finalizar de los conocimientos por parte de los estudiantes en el desarrollo de las mismas, con una duración de 8 intervenciones, contando los test.

La 3ª fase: la acción y observación, es donde se realiza el seguimiento de la acción, es decir, se realiza la intervención en el aula.

La 4ª fase: la evaluación y reflexión, es el cierre del ciclo, debido a que genera el informe o replanteamiento, pues constituye una secuencia en donde se valida e interpreta la acción, según Elliot (1993) citado por Blasco (2007), *“El informe debe relatar la historia de su desarrollo en el tiempo”*, así todos los datos que han sido recopilados son utilizados para apoyar las evidencias de los cambios que van surgiendo a la luz de la teoría de las representaciones semióticas de Duval (1992).

2.3 Instrumentos de recolección de información y análisis de información

Como todo trabajo se debe recoger información para posteriormente analizarlo e interpretarlo, para ello se tienen las fuentes primarias y secundarias como formas de recoger la información.

En las primarias se obtiene información mediante el contacto directo, en este caso con los estudiantes, además la información es construida por el investigador, y es este mismo el encargado de diseñar sus propios instrumentos, al igual que puede definir las variables a analizar según su intención y tener mayor control sobre los errores que se van presentando.

En las secundarias, el contacto es indirecto, la información es ya existente y los instrumentos han sido diseñados por otros investigadores.

Para ello se proponen los siguientes instrumentos:

- Observación: Se registra lo observado pero no se interroga a los implicados y es una descripción objetiva, acá es posible recoger cualquier información de la interacción de los estudiantes con el concepto de derivada, se selecciona la información correspondiente al problema.
- Pre-test: Como proceso de ensayo que permite evaluar a los estudiantes para determinar el estado en que se encuentran sus saberes previos.
- Guías: Son sesiones en la que se integra la teoría y la práctica y puede arrojar información sobre la comprensión y análisis de todos los conceptos que

intervienen para aproximarse al concepto de derivada por parte de los estudiantes que desarrollan la práctica, se realiza de forma escrita.

- Hipermediales y Multimediales: Interacción con las TIC, por medio de simulaciones en plataformas como GeoGebra; además de programas como Excel, debido a que permite interactuar y evaluar los conocimientos adquiridos de los participantes.
- Pos-test: Como proceso de ensayo que permite evaluar a los estudiantes para determinar el estado final en que se encuentran sus saberes.

Luego de obtener la información, debe ordenarse y presentarse de forma ordenada a través de informes y análisis que sintetizan la información recopilada.

2.4 Población y Muestra

Esta intervención se lleva a cabo en la Institución Educativa Bello Oriente, tomando como población a los estudiantes de la Institución; y para la muestra se tiene a los estudiantes del grado 11, los cuales se encuentran en un solo grupo y pertenecen a dos media técnicas diferentes, una es la instalación de redes eléctricas y la otra es diseño de software, en dicho grupo se encuentran 40 estudiantes que oscilan entre las edades de 16 a 19 años, además de sus dificultades sociales, culturales y económicas se encuentra la dificultad de que la mayoría de estudiantes no han tenido continuidad en su proceso educativo y menos continuidad en la Institución por motivos de desplazamiento, de ahí su desmotivación por el conocimiento y por continuar sus estudios de educación superior.

2.5 Delimitación y alcance

El alcance es un diseño de una secuencia didáctica que contribuya a la enseñanza del concepto de derivada a partir de las representaciones de la pendiente de una recta como razón de cambio con el uso de las TIC, en el cual se puedan construir diferentes

representaciones, producir resultados, validar y finalmente generalizar o si es el caso volver a empezar, logrando establecer ese vínculo entre realidad y matemática, por lo que se espera mejorar desempeños en matemáticas que se verán reflejados en los resultados en pruebas internas de la Institución y posteriormente mejoras en las pruebas externas como ICFES y finalmente con el paso a la universidad para continuar sus estudios académicos.

2.6 Cronograma

Tabla 2-1 Planificación de actividades.

Fase	Objetivos	Actividades
Fase 1: Caracterización	Identificar la problemática alrededor de la comprensión del concepto de derivada, las teorías del aprendizaje y las TIC, través de un Pre-test que sirva como diagnóstico del grupo a intervenir sobre los conocimientos que poseen los estudiantes.	1.1. Revisión bibliográfica sobre la teoría de las representaciones semióticas de Duval y los documentos rectores de la educación colombiana y PEI de la Institución Educativa Bello Oriente enfocados a la enseñanza de la derivada en grado undécimo. 1.2. Elaboración de objetivos general y específicos que guíen el trabajo final.
Fase 2: Diseño	Diseñar actividades que conformen una secuencia didáctica por medio de las representaciones semióticas de Duval haciendo uso de las TIC para la enseñanza del concepto de derivada.	2.1. Diseño y construcción de actividades centradas en la enseñanza del concepto de derivada, como guías y talleres. 2.2. Producción y selección de instrumentos y recursos a utilizar para la aplicación de la secuencia de actividades.

		2.3. Elaboración de evaluaciones que puedan dar cuenta de los conocimientos adquiridos sobre el concepto de derivada.
Fase 3: Intervención en el aula.	Aplicar la secuencia didáctica para la aproximación al concepto de derivada, mediante las representaciones de una recta como razón de cambio.	3.1. Aplicación de la secuencia didáctica con los estudiantes del grado 11.
Fase 4: Evaluación, Conclusiones y recomendaciones	Evaluar la incidencia de la secuencia didáctica en la enseñanza del concepto de derivada y su comprensión mediante distintas representaciones matemáticas.	<p>4.1. Aplicación de actividades evaluativas durante y al finalizar la implementación de la estrategia didáctica propuesta.</p> <p>4.2. Análisis de las evidencias recolectadas y los resultados obtenidos tras la aplicación de la secuencia de actividades.</p> <p>4.3. Formulación de conclusiones referentes a la intervención realizada, que sirvan como aporte para la enseñanza del concepto de derivada.</p>

3. Capítulo III. Sistematización de la intervención

3.1 Diseño de la secuencia didáctica

Anteriormente se había mencionado la secuencia didáctica como intervención en la que se dan una serie de acciones con unos objetivos específicos, las cuales son organizadas en este caso por el docente para que los estudiantes adquieran un aprendizaje.

Bajo esta perspectiva Díaz-Barriga (2013), propone la línea de secuencias didácticas y la línea de evaluación del aprendizaje, para este trabajo las dos líneas están interconectadas, a medida que se desarrollan las actividades de apertura, desarrollo y cierre, se trabaja sobre la evaluación.

- **Apertura:**

Esta fase tiene dos intervenciones, cada una con una duración de una hora; para iniciar el camino por la secuencia didáctica, los estudiantes se encuentran con la primera sesión que tiene como nombre: “¿Y si jugamos boliche matemático?”, aquí se propone una participación de los estudiantes con un juego digital llamado “Boliche Matemático” (Figura 3-1), este juego es una creación de la autora de este trabajo, y puede ser utilizado libremente, es básicamente una interface que cuenta con las instrucciones para jugar y dos guías de intervención, para el objetivo de la secuencia didáctica no se hará uso de estas, sino que se elaboró una guía nueva.

Para jugar es necesario dos jugadores, se diferencian en que uno presenta camiseta roja y el otro camiseta verde, a cada jugador le corresponde una tabla de registro de sus lanzamientos, aparecerá en la pantalla del computador pero también la tendrá de forma física, para poder efectuar el lanzamiento, cada jugador debe ubicarse en la pista de lanzamiento y presionar una vez la barra espaciadora, cada jugador tiene cuatro lanzamientos de forma intercalada, luego de esto se debe introducir en la pantalla y en la guía física la cantidad bolos derribados asociados a cada color y para

escribir el puntaje total se debe hacer los cálculos manuales, para ello a cada bolo derribado se le dan los siguientes valores: al bolo azul le corresponde un punto, al verde 2 puntos, al amarillo 3 puntos y al naranja 4 puntos.

Cada vez que se realiza el proceso de escribir el puntaje se da la conversión de la que habla Duval (1992), del registro de representación aritmético al registro de representación tabular, pues deben de llenar la tabla propuesta a partir de sus cálculos aritméticos que han elaborado de forma mental o escritural.

Figura 3-1. Juego Boliche Matemático.



Fuente: Elaboración del autor

A medida que el juego va transcurriendo se va trabajando una guía a la par, elaborada por la docente, se puede visualizar en el Anexo A, la cual tiene como finalidad introducir a los estudiantes al tema de la covariación, en donde cambios en una variable, en este caso la variable bolos determinan cambios en la otra, es decir, en la variable puntaje y posiblemente llegar a la construcción de un modelo que establezca la relación observada, a través de que proponga un modelo matemático para calcular el puntaje obtenido si se derriban 4 bolos, 26 bolos, 230 bolos, 1358 bolos y 10569 bolos; estas variables son de importancia porque son las que permiten después introducir en el concepto de pendiente.


La segunda sesión de la apertura, se denomina “Derribar bolos se vuelve una recta” consiste en graficar en Excel las tablas de la primera guía, en la Figura 3-2 se puede observar en qué consiste, aquí se trabaja la conversión que propone Duval (1992), cuando se pasa de un registro tabular a un registro gráfico, y a partir de allí, con una serie de preguntas ir direccionando a los estudiantes hacia la construcción de una función, en este caso lineal, el objetivo es asociar el registro tabular y numérico de la primera parte con el registro gráfico, esta guía se puede encontrar en Anexo B.

Figura 3-2. Guía: Derribar bolos se vuelve una recta.

1. En la situación 1 completaste dos tablas, ahora elije una tabla y un color de bolos, y completa las columnas de los bolos con su respectivo puntaje en la siguiente tabla:

Bolos	Puntaje Total

2. De esas tablas arma las parejas ordenadas que se relacionan bajo las dos variables:

3. Abre el programa Excel y en la Hoja1, celda 1A escribe Bolos y en la 1B escribe Puntaje Total, estas son tus dos variables del punto 1, ahora escribe los valores que tienes en tu hoja de trabajo y pásala a Excel de la misma forma, es decir, en cada celda hacia abajo un valor diferente.
4. Luego, selecciona con el cursor dando clic sostenido desde la celda 2A hasta la 5B, y en la barra de menú da clic en insertar/gráficos/dispersión/dispersión con líneas suavizadas y marcadores 
5. Continúa haciendo el mismo procedimiento pero ahora en la Hoja2 para la segunda tabla.

Fuente: Elaboración del autor

Luego de realizar esta conversión entre registros, se introduce el concepto de pendiente de una recta a través de las parejas ordenadas, pero solo analizando el cambio en el eje horizontal, $\Delta x = x_2 - x_1$, y el cambio en el eje vertical, $\Delta y = y_2 - y_1$, de forma separada, esto con el fin de luego encontrar la relación de la razón de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; se pretende que los estudiantes lleguen a la conclusión de que la pendiente de la recta que se visualiza en el registro gráfico, también puede hallarse de forma algebraica y es la misma que la razón de cambio.

En esta sesión finalizan las actividades de apertura, para dar consecución a las actividades de desarrollo.

- **Desarrollo:**

En las actividades de apertura se trabajan los conceptos de razón, variable dependiente, variable independiente, plano cartesiano, pareja ordenada, recta, secante, tangente a una curva y función, conceptos que son ampliados después por el docente encargado de la secuencia didáctica en clases magistrales.

Ahora, en las actividades de desarrollo, igual que las primeras ofrecen otras posibilidades, pero siempre apuntando a la conversión entre los sistemas para avanzar hacia el aprendizaje, se presentan registros tabulares, algebraicos, gráficos; para la secuencia didáctica, facilitará el trabajo de los conceptos razón de cambio, pendiente, ecuación punto-pendiente y función, como base para aproximarse al concepto de derivada.

Estas actividades comprenden tres sesiones, la primera, “Subiendo y bajando por la pendiente de una recta”, la cual tiene una duración de una hora tiene como finalidad analizar gráficamente la recta para concluir algunas características de la pendiente, esto se efectuará con ayuda de GeoGebra, este software libre que se encuentra online o puede descargarse, cuenta con la capacidad de integrar los registros algebraicos con los gráficos, también ha sido llamado software de geometría dinámica, permite visualizar a través de una simulación y posibilita la interacción con el concepto, momento que no es posible con la clase magistral, para visualizar esta guía en el Anexo C.

La siguiente sesión, “Intercambiando razones de bombillas”, la cual tiene una hora de duración, es desarrollada a partir de la realidad que viven los estudiantes de la Institución Educativa Bello Oriente en su media técnica de Instalaciones de redes eléctricas, para poder abrir el paso al concepto de razón de cambio en el análisis del costo que tiene la instalación de una red de bombilla, en esta situación, se presentan

conversiones entre registros tabulares, algebraicos y gráficos; guía que se puede observar en el Anexo D.

Finalmente para la fase de desarrollo, se tiene la guía “La pendiente de la recta como razón de cambio”, con una duración de dos horas, lo que permite es establecer la relación de la razón de cambio con la pendiente de una recta en la misma situación de la instalación de una red de bombilla, en esta actividad se pueden hacer transformaciones entre el mismo registro, el punto; por ejemplo, en las instalaciones de redes eléctricas si la razón de cambio fuera 0,000000638; ¿Cuál es el valor recaudado por una instalación?, pero además de permitir transformaciones en el registro algebraico, también permite transformaciones en el registro tabular, al relacionar $f(x) = mx$ con $(R)(x)$, la cual se visualiza en la Figura 3-3 y puede verse por completo en el Anexo E.

Figura 3-3. Guía: La pendiente de la recta como razón de cambio.

$f(x) = mx$	$(R)(x)$	Instalaciones de bombillas
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 1$	$(0,000000638)(\quad) = 1$	1
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 2$	$(0,000000638)(\quad) = 2$	2
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 3$	$(0,000000638)(\quad) = 3$	3
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 4$	$(0,000000638)(\quad) = 4$	4
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 5$	$(0,000000638)(\quad) = 5$	5
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 6$	$(0,000000638)(\quad) = 6$	6

Fuente: Elaboración del autor

Con esta guía finalizan las actividades de desarrollo para finalmente terminar con las actividades de cierre.

- **Cierre:**

Esta fase tiene una sola intervención denominada: ¿Y si nos acercamos hasta el límite?, ésta es la síntesis de la secuencia debido a que a partir de la pendiente como razón de cambio posibilita la construcción algebraica y gráfica del concepto de derivada por medio de GeoGebra, es importante resaltar que aunque la definición de dicho concepto utiliza el concepto de límite, este trabajo no pretende centrarse en este punto, sino en la pendiente de una recta como razón de cambio;

A pesar de lo anterior, al realizar en GeoGebra la interacción de la pendiente de la recta que es tangente a la función generada a partir de la instalación de bombillas con el valor recaudado, se direcciona al estudiante hacia la noción de límite, a través del ejercicio propuesto en la guía que puede apreciarse en el Anexo F, así: *“Como puedes observar en la gráfica cada vez que el punto B se acerca al punto A, el cambio en el eje horizontal Δx comienza a disminuir, podríamos afirmar que esta disminución cada vez se acerca más a ser cero, ¿Qué pasa si se vuelve cero?”*

Con esta intervención finaliza la secuencia didáctica, a continuación se presentan los resultados y análisis de dicha intervención.

3.2 Resultados y análisis de la intervención

Antes de iniciar la secuencia didáctica se desarrolló un Pre-test, el cual puede ser observado en el Anexo G, en dicha prueba se tomaron los conceptos previos que se deben tener claros para aproximarse al concepto de derivada, como lo son coordenadas, plano cartesiano, pendiente de una recta, razón de cambio, variable dependiente e independiente y función; es claro que el concepto de límite hace parte del concepto de derivada, pero para esta fecha los estudiantes de la Institución Educativa Bello Oriente aún no han iniciado con estas temáticas, por tal razón, no se realizan preguntas relacionadas con dicho concepto.

Para poder analizar los resultados del Pre-test, se hizo uso de una rúbrica, la cual puede visualizarse en la Tabla 3-1, al lado izquierdo aparecen los indicadores que se tuvieron en cuenta, indicadores que corresponden a los conceptos base para la construcción del concepto de derivada, algo que debe quedar claro es que la cantidad de estudiantes que respondieron este test equivale a un total de 37 estudiantes.

Tabla 3-1 Rúbrica de Pre-test.

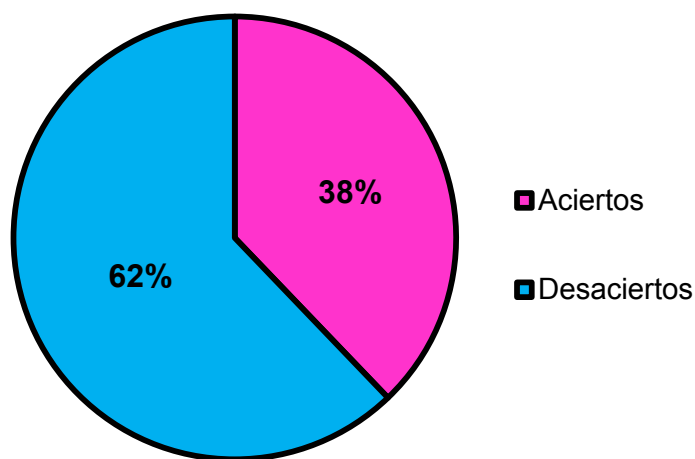
Indicadores	A	B	C	D	E	F
Pareja ordenada	14	-	-	.	-	23
Pendiente de una recta	-	4	16	10	4	-
Razón de cambio	12	-	-	-	-	25
Variable dependiente e independiente	10	-	-	-	18	9
Función	7	-	16	10	4	-

Fuente: Elaboración del autor

El indicador de pareja ordenada está medido por la pregunta 1 y corresponde a los literales A y F, en el A están todos los estudiantes que respondieron acertadamente con un porcentaje del 38% y en el F los que no acertaron a la respuesta con un porcentaje del 62%, esta relación puede visualizarse en la Figura 3-4. Ahora bien, del porcentaje de desaciertos descontamos 13 estudiantes que confunden el orden en que

se escriben las parejas ordenadas, toman como primera componente a “y” y como segunda componente a “x”, aunque esto sería un error, podría decirse que realmente los que no manejan el concepto en lo más mínimo corresponde al 27% que es igual a 10 estudiantes.

Figura 3-4. Gráfico: Indicador de pareja ordenada.



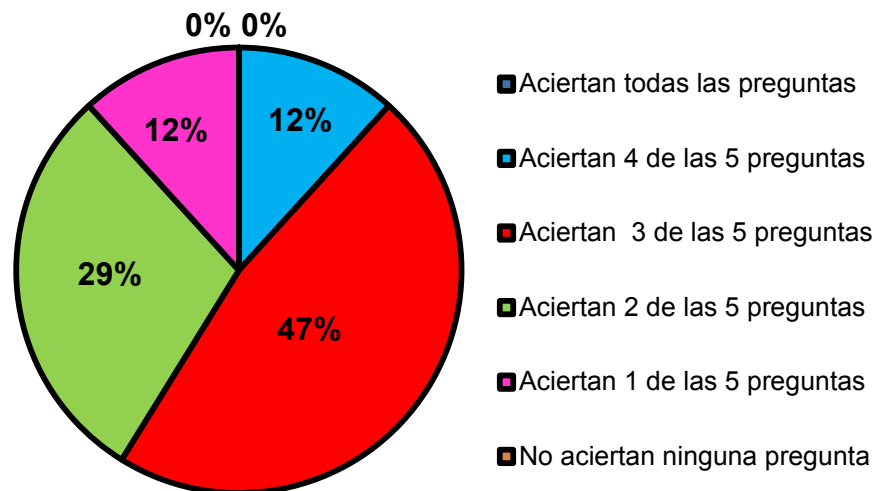
Fuente: Elaboración del autor

El siguiente indicador que se ha denominado pendiente está constituido por las preguntas 2, 3, 4, 5 y 6 y se analiza con los literales A, B, C, D, E y F; en el A se localizan los estudiantes que respondieron acertadamente las 5 preguntas, en este espacio no existe al menos un estudiante que acertara; en el literal B los estudiantes que responden 4 preguntas acertadamente con un porcentaje de aciertos del 12% de los estudiantes; en el C está la cantidad de estudiantes que responden 3 de las 5 preguntas, este literal es en donde más estudiantes concordaron con un porcentaje del 47%; luego el D contiene los estudiantes que responden 2 preguntas acertadamente con un porcentaje del 29% de los estudiantes; el literal E que presenta los estudiantes que solo contestan 1 respuesta acertadamente, con un porcentaje del 12%; y

finalmente el literal F no cuenta con estudiantes que no tuvieran aciertos, para una apreciación visual se presenta la Figura 3-5.

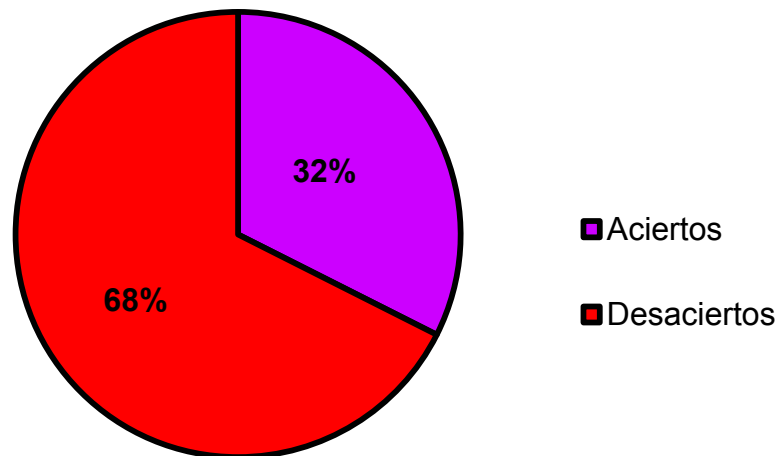
Además, en el Pre-test se pudo observar que la mayoría de estudiantes concuerdan con que una pendiente en matemáticas hace referencia a una inclinación, asimismo el 70% de los estudiantes identifican que cuando la pendiente es igual a cero la recta se vuelve constante.

Figura 3-5. Gráfico: Indicador de pendiente de la recta.



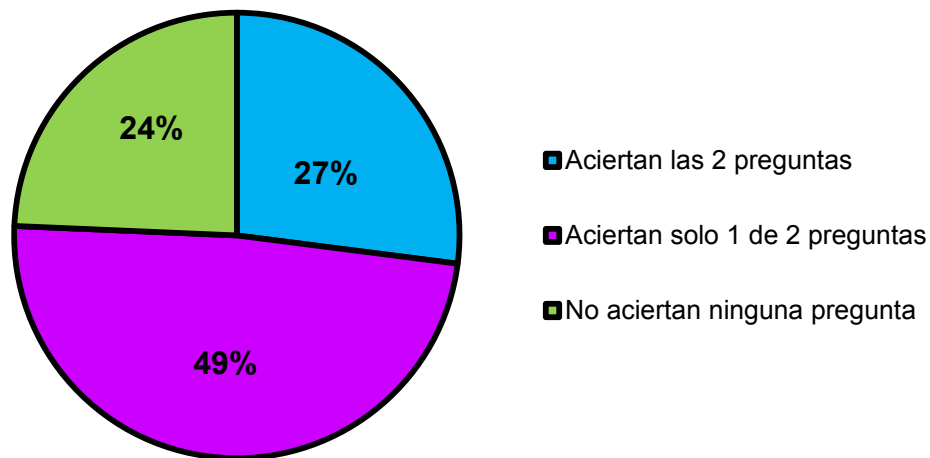
Fuente: Elaboración del autor

El tercer indicador, titulado razón de cambio está dado por la pregunta 7 y puede apreciarse en la Figura 3-6, esta pregunta comprende los literales A y F, en el primero se encuentra que el 32% de los estudiantes respondieron acertadamente, mientras que el resto de estudiantes responden las respuestas que incluyen la palabra cambio, y corresponde a la cantidad registrada en el literal F.

Figura 3-6. Gráfico: Indicador de razón de cambio.

Fuente: Elaboración del autor

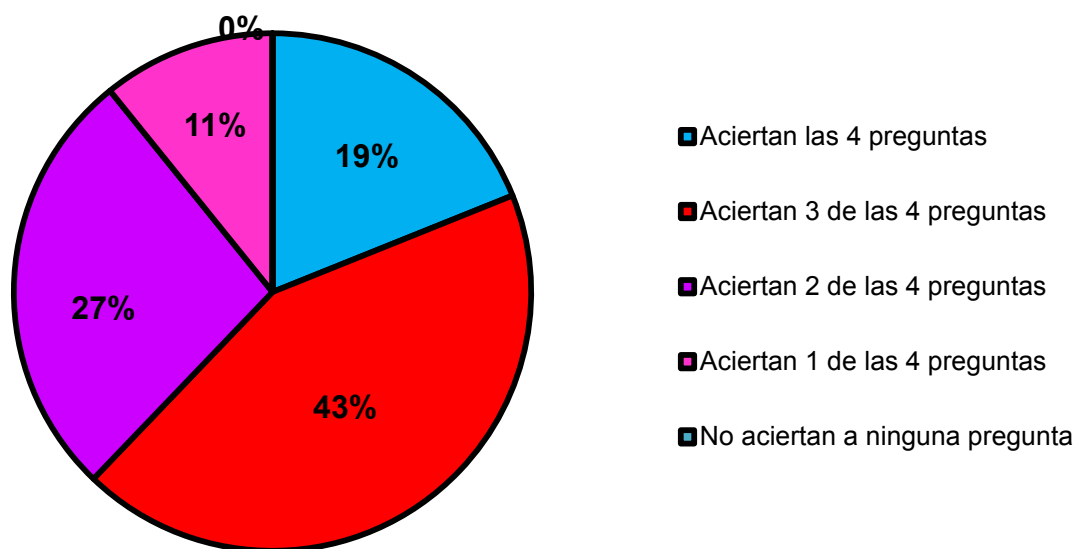
El indicador de variable dependiente e independiente está medido por las preguntas 8 y 9, y se puede apreciar en los literales A, E y F así, en el primer literal hay 10 estudiantes que acertaron correctamente a las dos preguntas, lo que quiere decir que reconocen cuales magnitudes son variables y de estas cuál es la dependiente y cuál es la independiente, en el literal E el 49% de los estudiantes solo responden una de las dos preguntas, de este porcentaje que corresponde a 18 estudiantes se tiene que 10 responden las variables en el orden incorrecto, confundiendo la variable dependiente con la independiente y viceversa; y finalmente en el literal F hay 9 estudiantes que no responden ninguna de las respuestas correctas, para tener otra visualización de estos resultados se tiene la Figura 3-7.

Figura 3-7. Gráfico: Indicador de variable dependiente e independiente.

Fuente: Elaboración del autor

En último se tiene el indicador de función, está ilustrado por las preguntas 10, 11, 12 y 13, analizadas en los literales A, C y D; en el A que estarían los estudiantes que respondieron de forma correcta las 4 preguntas, solo se ubican 7 personas con las que se podría asegurar que hacen una interpretación adecuada del concepto de función, el 43% consta de los estudiantes que respondieron 3 de las 4 preguntas adecuadamente y se puede visualizar en el literal C, se presentan dificultades en analizar a partir de funciones que modelan situaciones de la vida real los cambios que ocurren dentro de las variables, contando con que el 11% no demuestra dominio en realizar la conversión de un registro de lenguaje natural a un registro algebraico; en el último literal que sería el D se presenta a los estudiantes que al menos respondieron acertadamente una de las 4 preguntas con un porcentaje del 19%, se puede visualizar gráfico en la Figura 3-8 sobre el análisis establecido anteriormente.

Figura 3-8. Gráfico: Indicador de función.



Fuente: Elaboración del autor

De dicho Pre-test se puede inferir como los estudiantes presentan conflictos en el momento de establecer la representación de un concepto y que este representa lo mismo en otro registro, como podría ser el caso de una función en su registro tabular y gráfico, lo que se traduciría como la poca capacidad de hacer conversiones entre los registros, incluso las mismas transformaciones dentro del mismo registro; además se evidencian dificultades en conceptos básicos, como variable y pareja ordenada, dificultades que responden a vacíos conceptuales pero que tal vez sean subsanados en el momento de avanzar en la secuencia didáctica.

Seguido de esto se da inicio a la secuencia didáctica, para el análisis de los resultados de cada guía se hace uso de rúbricas, la secuencia comienza con la guía ¿Y si jugamos boliche matemático?, cuya rúbrica puede visualizarse en la Tabla 3-2.

Tabla 3-2 Rúbrica de ¿Y si jugamos boliche matemático?

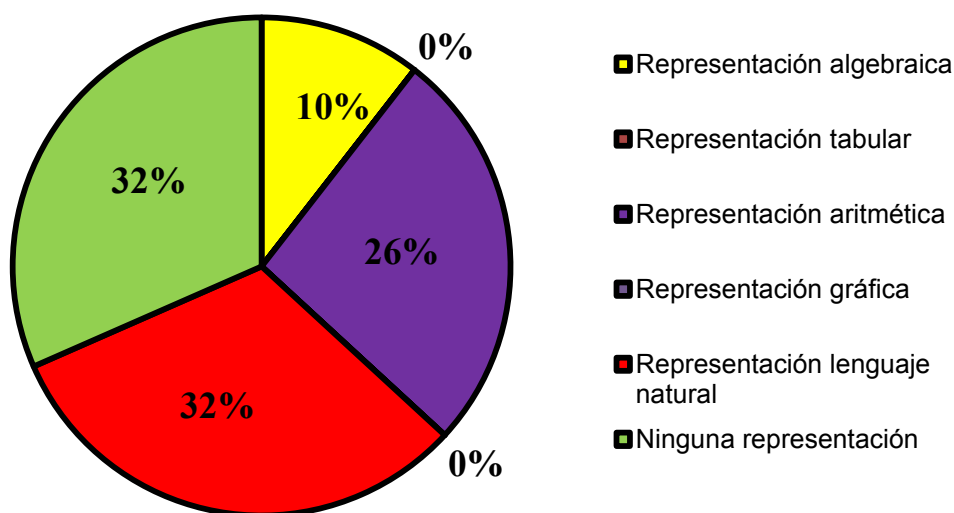
Indicadores	Estudiantes
Representación algebraica	4
Representación tabular	-
Representación aritmética	10
Representación gráfica	-
Representación lenguaje natural	12
Ninguna representación	12

Fuente: Elaboración del autor

El objetivo de esta guía es que los estudiantes a partir de las dos variables (Bolos derribados y Puntaje obtenido) luego de realizar procedimientos que requieren transformaciones en los registros aritméticos puedan hacer la conversión hacia el registro algebraico, generando un modelo matemático que generalice la situación para calcular cualquier cantidad de bolos derribados a partir de su puntaje.

En la revisión de los resultados se encuentra que 4 estudiantes logran llegar al modelo matemático a partir de su representación algebraica, además 26% llegan al mismo modelo pero de forma aritmética, el 32% lo hace por medio del lenguaje natural y el mismo porcentaje no logra crear el modelo matemático, asimismo de que no hay estudiantes que representen de forma tabular o gráfica, algunas de estas representaciones realizados por los estudiantes se pueden apreciar en los anexos, para representación algebraica el Anexo I, la representación de lenguaje común en el Anexo J y para la representación aritmética el Anexo K; para mejor análisis ver Figura 3-9.

Figura 3-9. Gráfico: Tipos de representaciones que hacen los estudiantes.



Fuente: Elaboración del autor

La guía 2, titulada Jugar bolos se vuelve una recta tiene dos objetivos, el primero es analizar si los estudiantes comprenden la covariación entre dos variables, es decir, que cambios en una generan cambios en la otra; y el segundo objetivo es verificar si realizan la conversión entre los registros tabular y gráfico, además del gráfico y lenguaje natural, en la Tabla 3-3 se pueden observar los resultados.

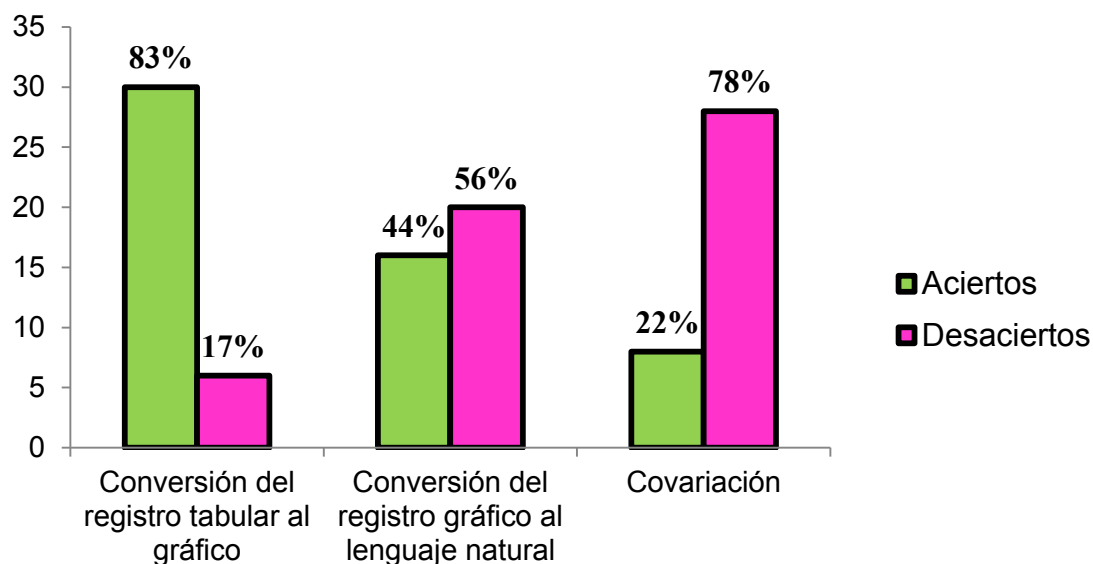
Tabla 3-3 Rúbrica de Jugar bolos se vuelve una recta.

Indicadores	Aciertos	Ninguno
Conversión del registro tabular al gráfico	30	6
Conversión del registro gráfico al lenguaje natural	16	20
Covariación	8	28

Fuente: Elaboración del autor

Al analizar la covariación, se observa que el 22% comprende la covariación entre las variables involucradas y el 78% no indica esta relación. Ahora bien, en relación a la conversión del registro tabular al registro gráfico en el plano cartesiano, en donde se forma una línea recta, se concluye que el 83% de los estudiantes logran hacer dicha conversión, para visualizar este tipo de conversión se puede dirigir al Anexo L; y finalmente cuando se les indica a partir de la gráfica hacer la conversión al lenguaje natural de este 83%, el 53% la realiza acertadamente; observar el análisis en la Figura 3-10.

Figura 3-10. Gráfico: Conversiones de una representación a otra.



Fuente: Elaboración del autor

Luego, en la Guía 3, Subiendo y bajando por la recta, centra su objetivo en la pendiente de la recta para analizar cómo varía y qué pasa cuando la recta está en posición horizontal y vertical, además cuando la recta se mueve cuáles son los elementos que cambian y que son característicos de la recta, para ello se construye la rúbrica que aparece en la Tabla 3-4, para su posterior análisis.

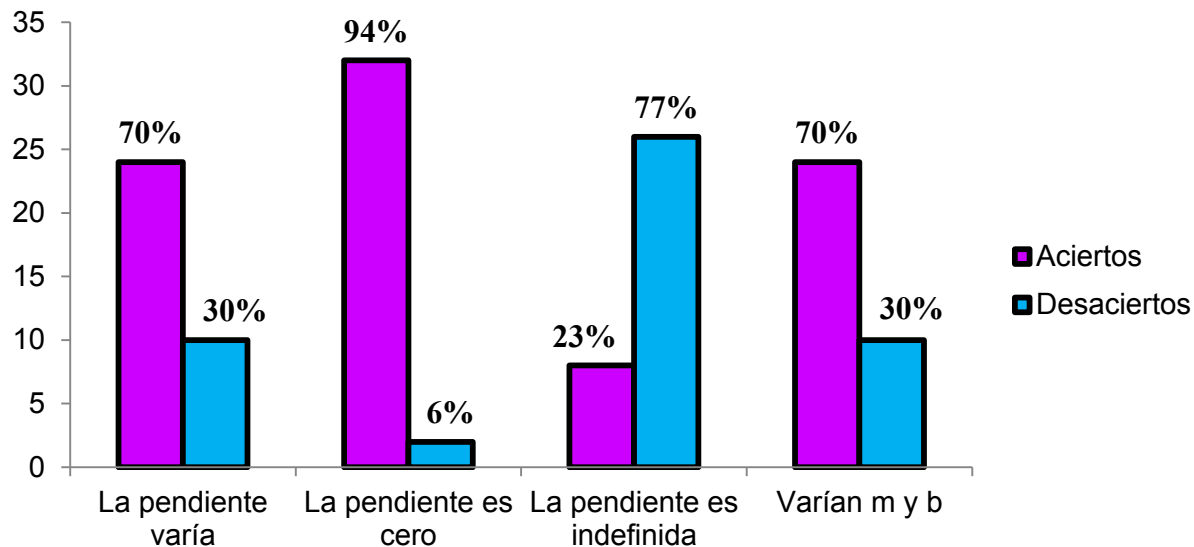
Tabla 3-4 Rúbrica de Subiendo y bajando por la recta.

Indicadores	Aciertos	Ninguno
La pendiente varía	24	10
La pendiente es cero	32	2
La pendiente es indefinida	8	26
Varían m y b	24	10

Fuente: Elaboración del autor

El primer indicador que corresponde a analizar de forma visual en GeoGebra lo que sucede con la pendiente cuando es movida, el 70% de los estudiantes expresa que la pendiente sufre un cambio en sus valores numéricos, unas veces se presenta negativo y otras positivo dependiendo de la posición en la que se encuentre, y el 30% restante no logra llegar a ninguna conclusión. Con referencia a que, si la recta se coloca en posición horizontal, el 94% llega a afirmar que la pendiente se vuelve cero porque no presenta inclinación alguna y el 6% escribe valores para la pendiente, afirmando que puede variar.

Ahora, cuando la recta toma una posición vertical, solo el 23% indica que la pendiente no se puede calcular y el 77% dice que puede tomar valores negativos y positivos. Posteriormente, cuando se pregunta por cuáles son los elementos que varían en una recta, el 70% de los estudiantes responden que son la pendiente y el intersección, dejando al 30% de los estudiantes con respuestas que no son las apropiadas; para visualizar dicha relación se tiene la Figura 3-11.

Figura 3-11. Gráfico: Cambios en la pendiente de una recta.

Fuente: Elaboración del autor

Consecutivamente, la Guía 4 Intercambiando razones de bombillas tiene como objetivo la relación existente entre la pendiente y la razón de cambio, así como covariación y variable dependiente e independiente. En la Tabla 3-5 se puede visualizar los resultados.

Tabla 3-5 Rúbrica de Intercambiando razones de bombillas.

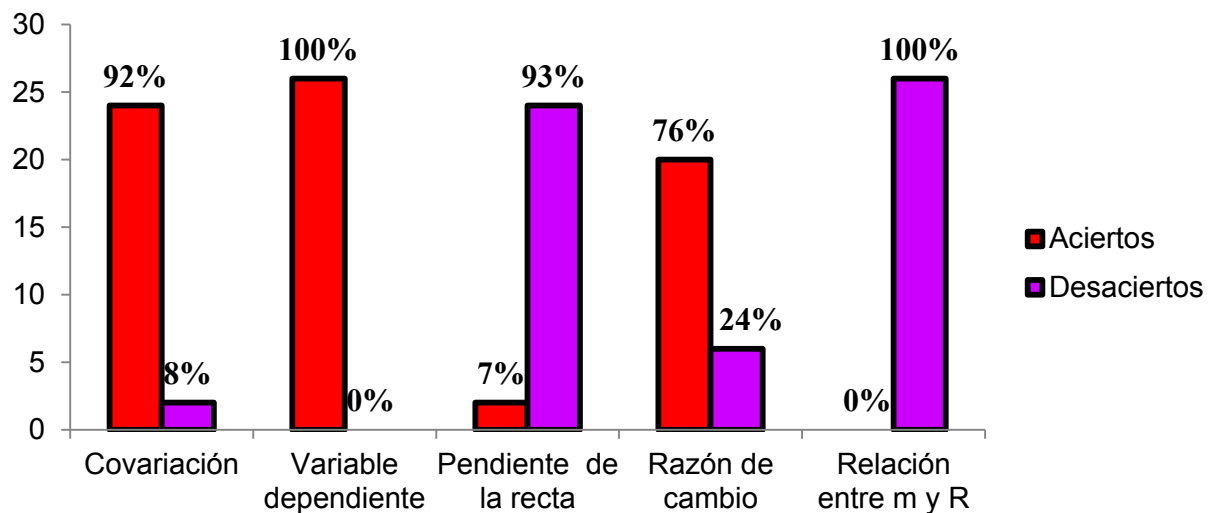
Indicadores	Aciertos	Ninguno
Covariación	24	2
Variable dependiente	26	0
Pendiente de la recta	2	24
Razón de cambio	20	6
Relación entre m y R	0	26

Fuente: Elaboración del autor

En este punto, sucede algo interesante, podría decirse que la cantidad de estudiantes que comprenden la covariación aumenta, ahora presentando un porcentaje

de 92% con respuestas acertadas, remitirse al Anexo M para visualizar las apreciaciones de los estudiantes, pero al calcular la pendiente de una recta se puede ver que solo el 7% de los estudiantes logran calcularla, hecho que lleva a comprobar que se aprecien dificultades en determinar cuál de las variables es la dependiente con un porcentaje del 100% en error, y para determinar la razón de cambio el 76% de los estudiantes logra calcularla, pero al no tener la pendiente de la recta correcta no logran establecer la relación existente entre la pendiente de una recta y su razón de cambio debido a estas falencias antes descritas; dicho análisis se puede apreciar en la Figura 3-12.

Figura 3-12. Gráfico: Pendiente de la recta y razón de cambio.



Fuente: Elaboración del autor

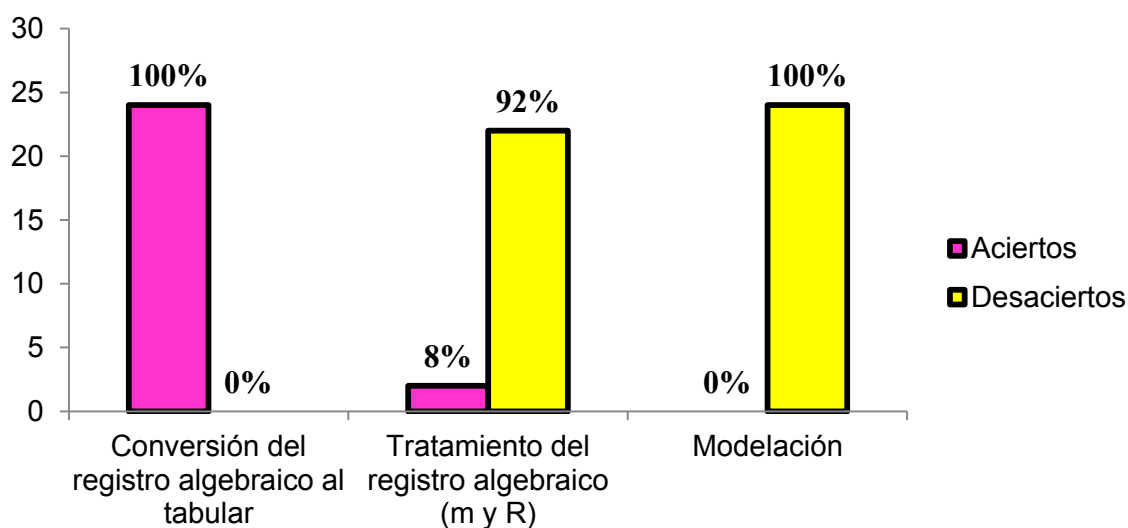
La Guía 5, La pendiente de la recta como razón de cambio, permite establecer la relación entre la pendiente y la razón de cambio, se puede observar en la Tabla 3-6 la rúbrica realizada para su posterior análisis.

Tabla 3-6 Rúbrica de La pendiente de la recta como razón de cambio.

Indicadores	Aciertos	Ninguno
Conversión del registro algebraico al tabular	24	0
Tratamiento del registro algebraico (m y R)	2	22
Modelación	0	24

Fuente:
Elaboración del autor

El objetivo del primer indicador consiste en que a partir del registro algebraico los estudiantes puedan hacer la conversión al registro tabular, esto haciendo transformaciones dentro del mismo registro algebraico, a partir de la pendiente hacia la razón de cambio, objetivo que se logra cumplir en un 100% en aciertos, lo que contradice el segundo indicador, porque en este la transformación es de forma contraria, es decir a partir de la razón de cambio volver a la pendiente y de este 100%, solo el 8% lo consigue, ver anexo N de respuestas dadas por los estudiantes. Por último, se debía construir un modelo matemático para esta nueva situación y se tiene que ningún estudiante logra modelarlo, para mejor visualización, Figura 3-13.

Figura 3-13. Gráfico: Tratamiento y conversión entre la pendiente de la recta y la razón de cambio.

Fuente: Elaboración del autor

Finalmente, se tiene la Guía 6, titulada ¿Y si nos acercamos al límite?, el objetivo es acercarse a la construcción del concepto de derivada a partir de su análisis gráfico en GeoGebra, en la Tabla 3-7 puede visualizarse su rúbrica, en la que el concepto de derivada se fundamenta en conceptos como recta, secante, tangente, pendiente, función y límite.

Tabla 3-7 Rúbrica de ¿Y si nos acercamos al límite?

Indicadores	Aciertos	Ninguno
Recta	30	10
Tangente y curva	30	10
Relación tangente y secante	36	4
Pendiente de la tangente	8	32
Cambio eje horizontal	10	30
Función	2	38
Límite	2	38

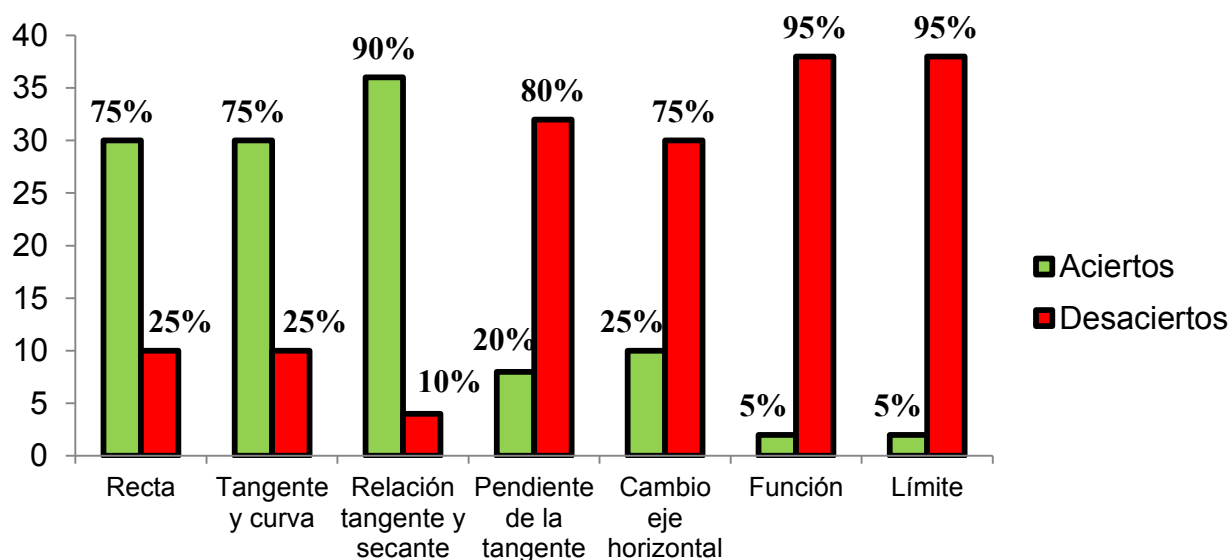
Fuente: Elaboración del autor

En el primer indicador se presenta la definición de recta en esta el 75% de los estudiantes reconocen que para trazar una recta se necesitan conocer dos puntos y el 25% restante indica que se puede trazar con un solo punto; además este mismo porcentaje, establece que la relación entre una función y su tangente es el hecho de ser comunes en un solo punto.

Por otro lado, cuando se establece la relación existente entre una tangente a una curva y la secante de la curva que tiene en común con la tangente un punto, se puede afirmar que solo el 10% no encuentra relación alguna contrarrestando que el 90% si logra establecer la relación existente, relación que se puede apreciar en el Anexo O, a pesar de que la mayoría indica que la secante y la tangente al ser iguales comprenden pendientes iguales, el indicador de pendiente de la tangente se ve afectado al obtener un 80% de estudiantes diciendo que no puede calcularse la pendiente de dicha tangente por tener solo un punto.

Ahora bien, en el indicador de cambio en el eje horizontal el 75% no asocia a Δx como el cambio en este eje, a pesar de que reconocen que la pendiente de una recta es el cociente entre el cambio en el eje y con el cambio en el eje x ; así mismo en el indicador de función conociendo que $y = f(x)$, el 95% de los estudiantes no demuestran el dominio conceptual cuando se les pide que reemplacen los “ y ” por $f(x)$ en la ecuación de la pendiente, por lo que podría decirse que no asocian la relación $y = f(x)$. Finalmente, en el indicador de límite cuyo objetivo es acercar a los estudiantes al concepto, llevándolos a que Δx se acerca cada vez más a cero sin serlo, solo el 5% de los estudiantes logra llegar a esta conclusión; para mejor análisis observar la Figura 3-14.

Figura 3-14. Gráfico: Conceptos básicos para aproximarse el concepto de derivada.



Fuente: Elaboración del autor

Para dar finalización al análisis de la secuencia didáctica puede sintetizarse en que los aspectos deficientes que se evidenciaron en el Pre-test tienen menos porcentaje de desacierto, posiblemente, los estudiantes hayan recordado o tal vez acercado al aprendizaje de estos conceptos, además, reconocen que los conceptos pueden representarse en diversos registros, además que estos registros pueden tener

transformaciones, pero continúan siendo débiles las conversiones entre los registros, se debe reforzar en el interior de las matemáticas las conversiones entre los registros de representación para generar la comprensión del concepto del que habla Duval (1992).

Posteriormente, se realiza un Pos-test, el cual puede ser observado en el Anexo H, en dicha prueba se tomaron los conceptos bases que se deben tener para aproximarse al concepto de derivada analizados en el Pre-test, como lo son recta tangente, pendiente de una recta, razón de cambio, variable dependiente e independiente y función, además se adiciona los conceptos de covariación y límite pero este último solo desde el cambio cuando se va acercando el Δx a cero sin serlo.

Para poder analizar los resultados del Pos-test al igual que el Pre-test y las guías se hace uso de las rúbricas, la cual puede visualizarse en la Tabla 3-8, al lado izquierdo aparecen los indicadores que se tuvieron en cuenta, indicadores que corresponden a los conceptos base para la construcción del concepto de derivada.

Tabla 3-8 Rúbrica de Pos-test.

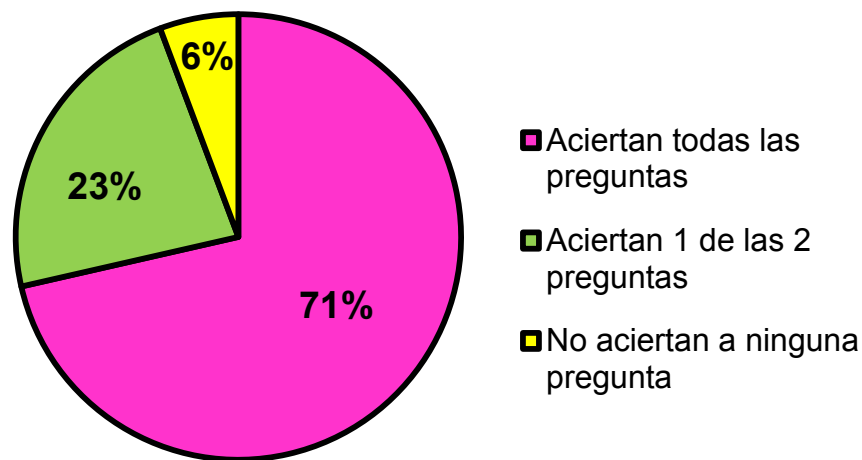
Indicadores	A	B	C	D
Recta tangente	25	-	8	2
Función	1	14	16	4
Pendiente de una recta	3	10	13	9
Razón de cambio	-	2	9	24
Variable dependiente e independiente	-	-	12	23
Covariación	-	-	14	21
Límite	-	-	17	18

Fuente: Elaboración del autor

El indicador de recta está medido por las preguntas 3 y 14, en el A están todos los estudiantes que respondieron acertadamente a las 2 preguntas con un porcentaje del 71%, en el literal C, se encuentran los estudiantes que acertaron al menos una de las 2 preguntas, que equivale a un 23%, y luego se tiene en el D los estudiantes que no acertaron ninguna de las preguntas con un porcentaje del 6% para un total de 35

estudiantes, se puede afirmar de este análisis que el 80% de los estudiantes comprende la definición de tangente y el 89% la reconoce gráficamente, esto en términos de Duval (1992) lo que quiere decir es que logran hacer conversiones entre el registro lenguaje común y el registro gráfico, esta relación puede visualizarse en la Figura 3-15.

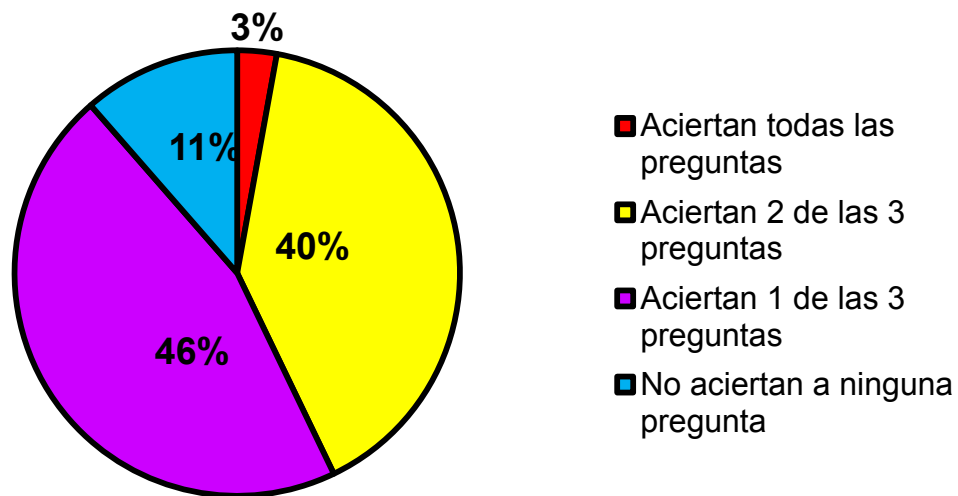
Figura 3-15. Gráfico: Indicador de recta tangente.



Fuente: Elaboración del autor

El indicador de función está ilustrado por las preguntas 2, 4 y 7, en el literal A que están los estudiantes que respondieron de forma correcta las 3 preguntas, solo se ubica un estudiante con el que se podría asegurar que hacen una interpretación adecuada del concepto de función, el 40% contesta 2 de las 3 preguntas adecuadamente y se puede visualizar en el literal C, luego el 46% que se puede observar en el literal D son los estudiantes que respondieron una sola pregunta de las 3 presentadas en el Pos-test, se encuentran dificultades en hacer la conversión al registro algebraico a partir de una situación del registro lenguaje común, que se traduciría en una función que modela los cambios que ocurren dentro de las variables, contando con que el 54% de los estudiantes no alcanza a hacer dicha conversión; visualizar gráfico en la Figura 3-16.

Figura 3-16. Gráfico: Indicador de función.



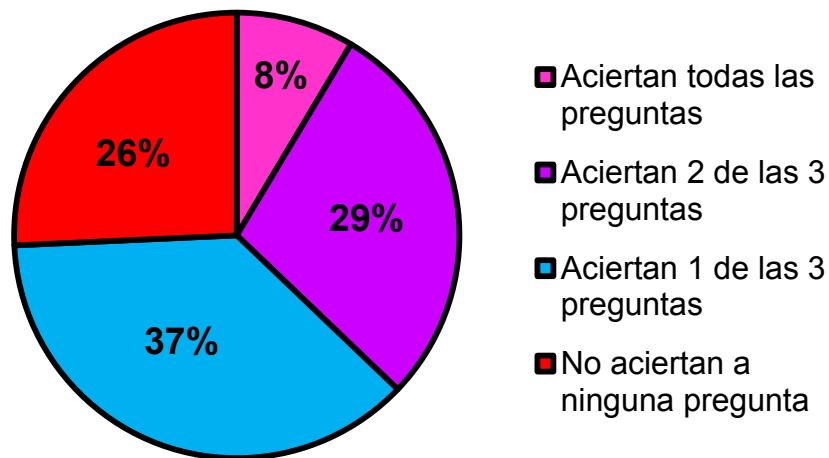
Fuente: Elaboración del autor

Para el indicador de pendiente de la recta se tienen las preguntas 1, 10, y 11 y se analiza con los literales A, B, C y D, en el A se encuentran todos los estudiantes que respondieron acertadamente las 3 preguntas, en este espacio 3 estudiantes aciertan, de estos se puede afirmar que comprenden el concepto; en el literal B están los estudiantes que responden 2 de las 3 preguntas acertadamente, aquí el 29% de los estudiantes aciertan; en el literal C corresponde a los que responden 1 de las 3 preguntas, en este literal es en donde más estudiantes concordaron, teniendo un porcentaje del 37%; luego el literal D que contiene los estudiantes que no tuvieron aciertos.

De todo esto se observa que la mayoría de los estudiantes calculan la pendiente de una recta a partir de dos coordenadas, pero presentan errores en las operaciones básicas de enteros, a lo que su respuesta no tiene el signo menos, además el 46% de los estudiantes no logran identificar las características de la pendiente cuando se

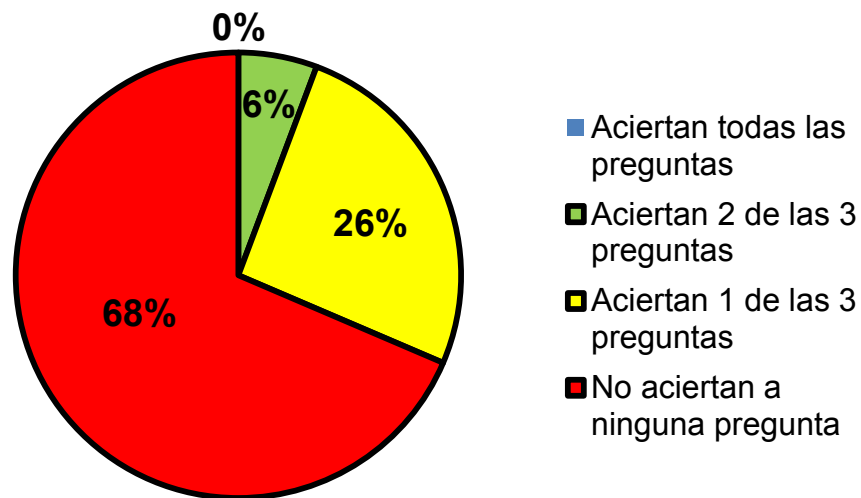
encuentra en posición vertical ni horizontal; para un mejor análisis se presenta la Figura 3-17.

. **Figura 3-17. Gráfico: Indicador de pendiente de la recta.**



Fuente: Elaboración del autor

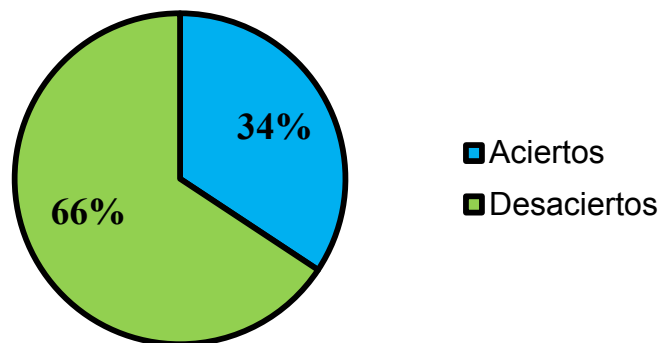
El indicador de razón de cambio está dado por las preguntas 6, 9 y 12, puede apreciarse en la Figura 3-18, que ningún estudiante logra responder las tres preguntas y se refleja en el literal A, en el literal B con un 6% están los estudiantes que respondieron 2 de las tres preguntas, luego en el C con un porcentaje del 26% se encuentran los que respondieron acertadamente una pregunta de las 3 presentadas y finalmente, en el D los estudiantes que no aciertan a ninguna pregunta con un porcentaje del 68%, de estos últimos el 42% no logra hacer asociaciones con todas las características que posee una razón de cambio ni logra establecer la relación con la pendiente de una recta.

Figura 3-18. Gráfico: Indicador de razón de cambio.

Fuente: Elaboración del autor

Ahora bien, el indicador de variable dependiente e independiente está medido por las pregunta 5 y se mide en los literales C y D, en el primer literal, hay 12 estudiantes que acertaron correctamente a la pregunta, lo que equivale a un 34%, esto quiere decir que reconocen cuál variable es dependiente y cuál independiente en una situación real; y en el literal D, el 66% de los estudiantes indican las variables en el orden incorrecto, confundiendo la variable dependiente con la independiente y viceversa, en la Figura 3-19 se ilustra esta situación.

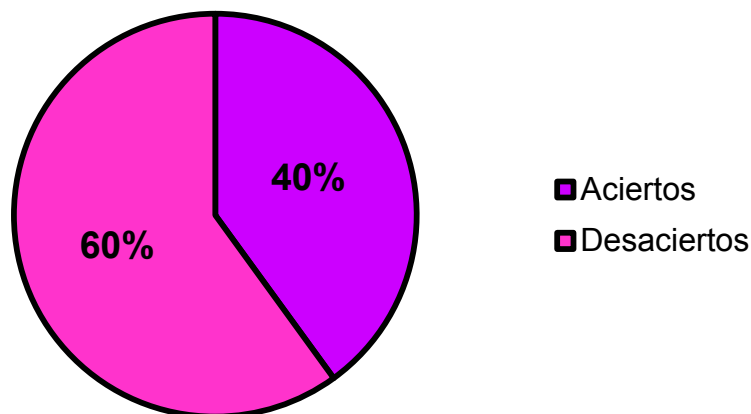
Figura 3-19. Gráfico: Indicador de variable dependiente e independiente.



Fuente: Elaboración del autor

Luego en el indicador de covariación presente en la pregunta 8, representado en los literales C y D, se tiene que en el literal C hay un porcentaje de 40% que indica que estos estudiantes pueden establecer la relación de que cambios en una variable ocasiona cambios en la otra, todo esto a partir de registros de lenguaje común; mientras que en el literal D, el 60% de los estudiantes no logra hacerlo, en la Figura 3-20 se aprecia este análisis.

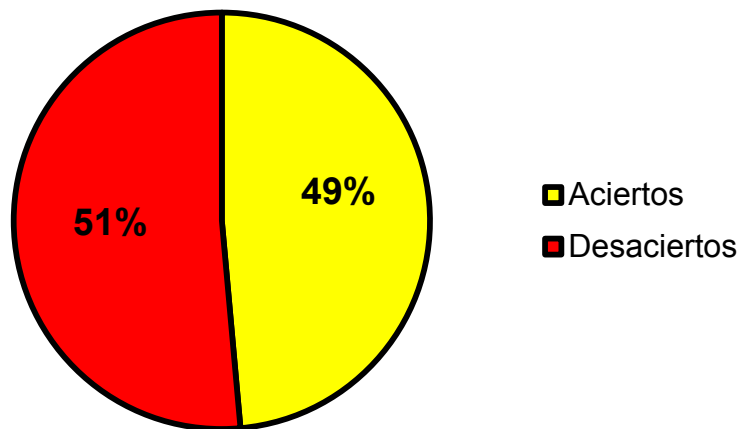
Figura 2-20. Gráfico: Indicador de covariación.



Fuente: Elaboración del autor

El indicador de límite que se encontraba en la pregunta 13 y puede visualizarse en la Figura 3-21, se analizaron bajo dos componentes, el C y D, se observa que los estudiantes ubicados en el literal C corresponden a los que responden acertadamente a que el cambio en el eje horizontal se acerca a cero pero no lo es, comprenden un porcentaje del 49%, contrarrestado a un 51% que no logra acertar, indicando que necesitan ver la gráfica para responder, estudiantes ubicados en el literal D.

Figura 3-21. Gráfico: Indicador de límite.



Fuente: Elaboración del autor

Finalmente, se realiza una comparación que puede ser visualizada en la Tabla 3-9 en donde se tienen los resultados del Pre-test contrarrestados con el Pos-test, en el primer indicador aparece la cantidad de estudiantes que logran hacer una transformación dentro del registro de lenguaje común del concepto de variable dependiente e independiente; y en la siguiente columna, denominada ninguno, son los estudiantes que no aciertan a esta transformación, en el Pre-test se encuentra en la pregunta 8 y 9, mientras que en el Pos-test en la pregunta 5.

Luego, el indicador de pendiente de una recta cuenta con dos ítems, en el primero están los estudiantes que logran o no la conversión de un registro de lenguaje

común a un registro gráfico y en el segundo los que aciertan en la transformación dentro del registro algebraico; si se desea visualizar el primer ítem se encuentra en el Anexo G, en las preguntas 2 y 4, mientras que el segundo ítem en la pregunta 6; y en el Anexo H, el primer ítem en las preguntas 10 y 11; y el segundo en la pregunta 1.

Para el siguiente indicador, se analiza la conversión entre el registro común, tabular y algebraico del concepto de función y la transformación en el registro algebraico del mismo concepto, en el Pre-test la conversión se puede observar en la pregunta 13 y la transformación en la 7, y en el Pos-test la conversión en la pregunta 7 y la transformación en la pregunta 2.

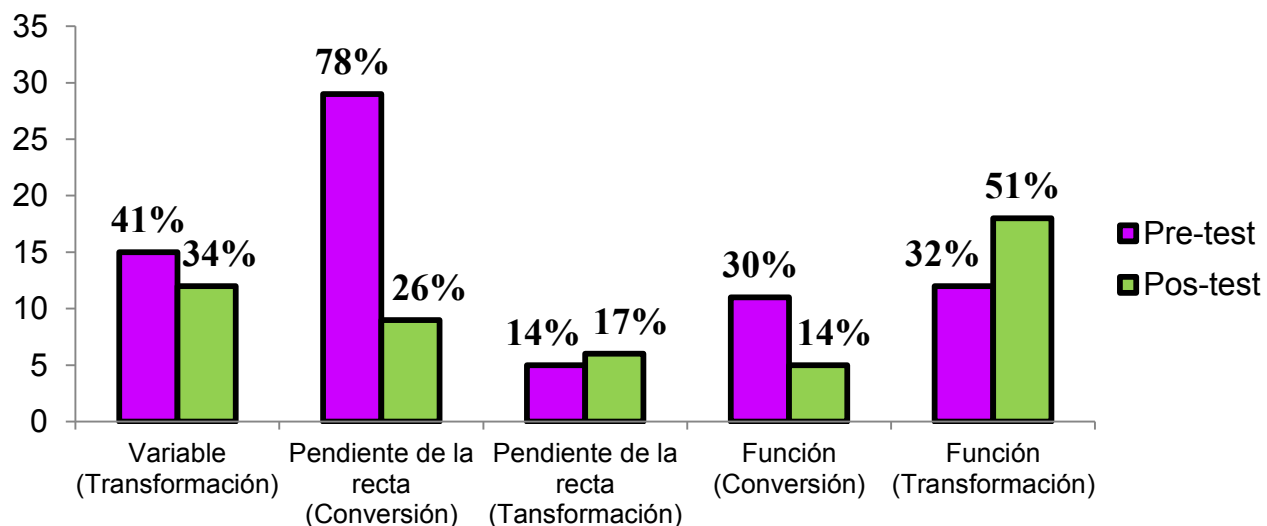
Tabla 3-9 Rúbrica de Pre-test Vs. Pos-test.

Indicadores	Test	Aciertos	Ninguno
Variable (Transformación)	Pre-Test	15	22
	Pos-Test	12	23
Pendiente de la recta (Conversión)	Pre-Test	29	8
	Pos-Test	9	24
Pendiente de la recta (Transformación)	Pre-Test	5	32
	Pos-Test	6	29
Función (Conversión)	Pre-Test	11	26
	Pos-Test	5	30
Función (Transformación)	Pre-Test	12	25
	Pos-Test	18	17

Fuente: Elaboración del autor

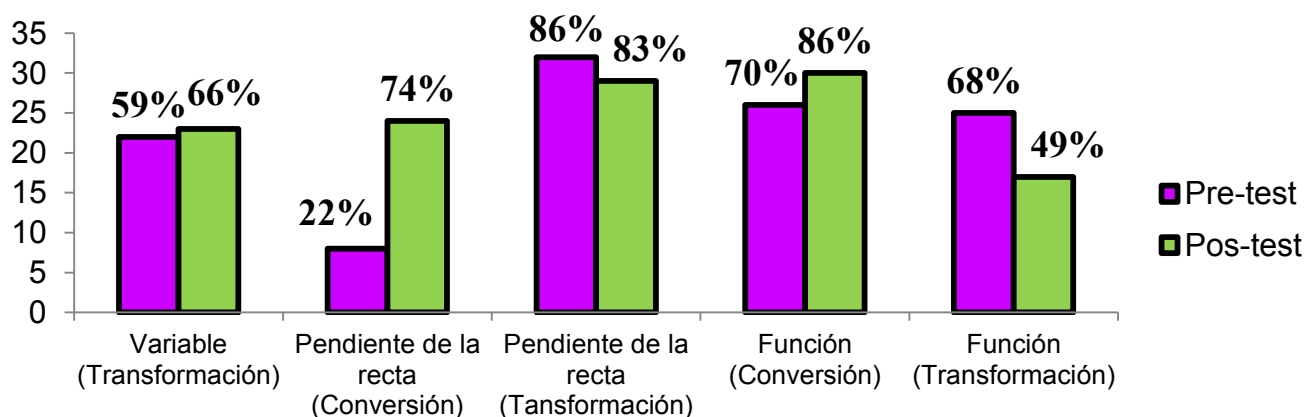
Ahora, en la Figura 3-22 que es un gráfico comparativo de la Tabla 3-9 pero solo analizando los aciertos.

Con respecto a los porcentajes, debido a que en el Pos-test la cantidad de estudiantes era de 37 y para el Pos-test era de 35, los cálculos se hacen basados en relación a cada cantidad para que no se presente el caso de una diferencia significativa entre los dos test; se puede visualizar en los test que los estudiantes que logran hacer las transformaciones y conversiones de las que habla Duval (1992) dentro de los registros lenguaje común, gráfico, tabular y algebraico son muy pocos en ambos test, incluso en su mayoría no alcanzan a sobrepasar el 60% de los resultados.

Figura 3-22. Gráfico: Comparativo de aciertos entre el Pre-test y el Pos-test.

Fuente: Elaboración del autor

Con relación a los desaciertos, en la Figura 3-23 que es un gráfico también presente en la Tabla 3-9 en la columna ninguno, se puede observar en los dos test que los estudiantes en su mayoría no logran hacer las transformaciones ni las conversiones antes descritas, los errores en su mayoría están cerca o sobre al 60%.

Figura 3-23. Gráfico: Comparativo de desaciertos entre el Pre-test y el Pos-test.

Fuente: Elaboración del autor

Este contraste es importante realizarlo porque permite apreciar las relaciones encontradas al interior de los dos test realizados, bajo las perspectivas de aciertos y desaciertos, se puede determinar que las diferencias son significativas en ambos, aunque bien es cierto que los porcentajes de desaciertos son los más altos en la mayoría de los casos, cabe resaltar que ahora los estudiantes hacen consciente el uso de las diferentes representaciones que se pueden generar de una recta y reconocen que traducen lo mismo así el registro sea diferente, además pueden establecer relaciones al interior de dichos registros, lo que Duval (1992) llama transformaciones y aunque no es muy sobresaliente la conversión entre los registros, algunos estudiantes logran hacerla y le atribuyen significados que antes eran desconocidos para ellos.

3.3 Conclusiones y Recomendaciones

3.3.1 Conclusiones.

El objetivo de este trabajo era diseñar una secuencia didáctica que contribuyera a la enseñanza de las matemáticas, en particular del acercamiento a la comprensión del concepto de derivada a partir de las representaciones de la pendiente de una recta como razón de cambio, en donde intervienen registros algebraicos, tabulares, gráficos y de lenguaje natural, así como también el uso de las TIC a través de GeoGebra y las simulaciones que se pueden generar allí, esperando mejorar desempeños en matemáticas, resultados en pruebas internas y externas y el paso a la universidad de los estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Bello Oriente.

Para ello, inicialmente se aplica un Pre-test y a partir de su análisis se puede evidenciar la falta de lectura crítica por parte de algunos estudiantes, encontrando contradicciones en respuestas a preguntas en las que se requiere tener conocimientos matemáticos básicos, esto puede ser debido a que se realiza una lectura superficial o ligera que obstaculiza el razonamiento sobre lo que se está leyendo en relación con gráficos, lenguaje matemático y lenguaje natural, entorpeciendo la instrucción de la pregunta, además de que intervienen otros factores en el ambiente de aprendizaje, por nombrar algunos, se tiene el desconocimiento de algunas palabras, la memoria a corto plazo y el escaso interés.

Lo anterior valida que la falta de comprensión y vacíos conceptuales en matemáticas básicas dificulta el fortalecimiento del pensamiento variacional que es el que se ocupa de las relaciones de variación y cambio, la enseñanza de este pensamiento debe fortalecerse mediante el desarrollo de competencias y no solo en el alcance de los contenidos como se viene trabajando actualmente en la Institución por ello y a pesar de las dificultades presentadas, el Pre-test, no solo aporta a la identificación del problema, sino que contribuye a la intervención de las dificultades mediante las prácticas realizadas por el docente que acompaña la secuencia didáctica.

Para esta secuencia didáctica se diseñaron unas guías que aproximasen al concepto de derivada a partir de las diversas representaciones que se dan al interior de los registros algebraico, aritmético, tabular, gráfico y lenguaje natural; representaciones que se encuentran sustentadas bajo la perspectiva de Duval (1992), apoyadas en el uso de las TIC (GeoGebra, Excel y Boliche Matemático) para facilitar la visualización y manipulación de los objetos matemáticos innovando en las metodologías tradicionales utilizadas en la institución, debido a que normalmente se trabajaba el concepto de derivada desligado de sus diversas transformaciones y conversiones, aportando con este proceso a que los estudiantes pudieran reconocer las relaciones que se dan del concepto mediante sus diversas representaciones.

Al aplicar la secuencia didáctica se observa que durante su desarrollo se presentaron dificultades al hacer transformaciones dentro de los registros, y así mismo, en las conversiones de un registro a otro, debido a que persisten las falencias en analizar cambios en los datos, en la covariación y en la relación entre las diferentes representaciones de los objetos matemáticos.

A pesar de esto, en el transcurrir de la secuencia se van reduciendo algunas dificultades y la cantidad de estudiantes que logran hacer conversiones entre los registros incrementa, se puede vincular este efecto a que el uso de las TIC propician la asociación de dichos registros mediante una visualización global de las diferentes representaciones de un concepto, en particular el uso del GeoGebra permite analizar las interacciones intrínsecas de las diferentes representaciones (conversión), es decir, que al hacer modificaciones en un registro (transformación) se evidencian cambios en otros, esto diferencia las prácticas tradicionales de la enseñanza de las matemáticas poco interactivas al posibilitar la experimentación con conceptos matemáticos abstractos a través de su manipulación.

Por lo tanto, este trabajo impulsa al reconocimiento por parte de la institución de la importancia de trabajar los conceptos haciendo uso de diferentes metodologías, en especial las que integran las diversas representaciones de un concepto apuntando al fortalecimiento de las mismas lo que a futuro se espera disminuya el índice de pérdida en el área de matemáticas.

Por último, aunque los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia didáctica no fueron muy asertivos en cuanto a la solución de las guías, debido a que presentan deficiencias conceptuales, en lectura crítica, análisis, asociación; además se les dificulta hacer transformaciones dentro de los mismos registros y hacer conversiones de un registro a otro y en este caso específico del pensamiento variacional, estas propiciaron el acercamiento a las diferentes representaciones de los conceptos de función, límite, pendiente, razón de cambio mediadas por las TIC, para aproximarse al concepto de derivada; esto no quiere decir que exista una relación entre si hay o no hay un mejor aprendizaje después de la aplicación de la secuencia didáctica pero se puede afirmar que los estudiantes reconocen que existen diferentes registros para representar el mismo objeto matemático.

3.3.2 Recomendaciones.

Durante la realización de este trabajo siempre se tuvo presente la aproximación al concepto de derivada a través de las representaciones matemáticas que se podían establecer, pero lo que no se tuvo presente es que en la secuencia didáctica aparecen las guías de conceptos implícitos y no implícitos como variable dependiente e independiente, función lineal, proporcionalidad directa, razón de cambio, pendiente de una recta; por lo que es de importancia que no solo se trabajen estas guías para llegar al concepto de derivada sino que sean aprovechadas para trabajar otros conceptos.

A pesar de que normalmente los estudiantes no logran estar concentrados mucho tiempo, durante el desarrollo de las guías se evidenció que requieren de más tiempo para elaborarlas, con el poco tiempo tienden a dar respuestas apresuradas, sin ser analizadas, incluso salidas de contexto; se pensó en que las guías fueran elaboradas en parejas, a pesar de que se creería que se favorece el conocimiento en la comunicación entre pares, los resultados no evidencian esto, del estudiante que por su recorrido académico se espera resultados positivos es el que arrastra a su pareja, no se establecen discusiones académicas, uno hace lo que el otro quiere.

Así mismo, se requiere que los docentes hagan énfasis en el uso de las diferentes representaciones por parte de los estudiantes que se pueden obtener de un concepto, normalmente, se quedan con una representación algebraica, desde su mecánica y secuencia de pasos, pero no establecen ni siquiera las transformaciones dentro del mismo sistema de representación lo que ocasiona en los estudiantes la comprensión a medias o la no comprensión de un concepto.

Es claro que los docentes de esta época de inmersión tecnológica deben valerse de ella para tratar de aportar a la enseñanza de las matemáticas y en general de la educación, no pueden desfallecer en su intento de que las matemáticas no sean el temor en la escuela y una secuencia didáctica mediada por las TIC puede ser una opción.

Referencias

- Alsina, Josep & otros. (2013). *Rúbricas para la evaluación de competencias*. Universitat de Barcelona. España: Ediciones Octaedro.
- Amaya, Jorge & otros. (2012). *Construcción de objetos virtuales de aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas*. Universidad de Antioquia. Medellín.
- Andonegui, Martín. (2006). *Cuaderno N° 11 Razones y proporciones*. Venezuela: Federación internacional fe y alegría.
- Barrientos, Paula. (2014). *Libro-Taller para la enseñanza del concepto de derivada en el grado 11° (UN ENFOQUE GEOMÉTRICO)*. Medellín.
- Blasco, Josefa. *La investigación- acción*. Recuperado el 12 de septiembre de 2017, de La investigación- acción:
<https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/12090/1/LA%20INVESTIGACI%C3%93N%20ACCI%C3%93N.pdf>
- Buitrago, Luz & otros. (2009). *La secuencia didáctica en los proyectos de aula un espacio de interrelación entre docente y contenido de enseñanza*. Bogotá.
- Chala, Carlos & otros. (2016). *Matemáticas en contexto- Unidades didácticas*. Medellín: Impregón S.A. comunicación gráfica.
- Díaz-Barriga, A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Duval, R. (1992). *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Vega, Trad.) Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Engler, A., & Camacho, A. (2002). *Una mirada a investigaciones sobre la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional*. 18-36. Recuperado el 4 de agosto de 2017, de Una mirada a investigaciones sobre la derivada

- desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional:
<http://www.soarem.org.ar/Documentos/54%20Engler.pdf>
- Grupo ingeniería y sociedad. (2010). ¿Matemáticas y físicas las barreras en ingeniería? *Ingeniería y sociedad*. Obtenido de ¿Matemáticas y físicas las barreras en ingeniería? Recuperado el 20 de septiembre de 2017, de ¿Matemáticas y físicas las barreras en ingeniería? :
<https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/ingeso/article/view/7369/6816>
- Hernández, Yury. (2014). *Interpretación del cambio de funciones de variable real a partir de las formas de representación con el uso de Moodle*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.
- ICFES. (2016). *Reporte de resultados pruebas saber 11 2016-2 de la I. E. Reino de Bélgica*. Bogotá: ICFES.
- Leithold, Louis (1992). *El cálculo en geometría analítica*. Sexta edición. México: Industria editorial mexicana
- Melero, Noelia. (2011). *El paradigma crítico y los aportes de la investigación acción participativa en la transformación de la realidad social: un análisis desde las ciencias sociales*. Cuestiones Pedagógicas, volumen 21, 339-355. España.
- MEN. (2003). *Estándares básicos de competencias en matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!* Bogotá: Editorial magisterio.
- MEN. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje V. 2*. Medellín: Secretaría de educación de Medellín.
- MEN. (2008). *Ser Competente en Tecnología ¡Una necesidad para el desarrollo!*. Bogotá: Editorial magisterio.
- Mendoza, María Raquel. (2003). *Representaciones de la derivada de una función*. México.

- Mira, López Mauro. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje*. España.
- Pineda, Oscar. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de derivada en el último grado de educación secundaria*. Bogotá.
- Posada, Fabián & otros (2006). Módulo 2 Pensamiento variacional y razonamiento algebraico. Medellín: Editorial Artes y Letras Ltda.
- Ruiz, Angel. (2002). *Historia y Filosofía de las Matemáticas*. Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.
- Sampieri, Roberto & otros. (2006). *Metodología de la investigación*. México: MacGraw Hill.
- Vidal, Oscar. (2012). *Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos*. Bogotá.
- Villarreal, Mónica. (2012). *Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza*. Innovación y Experiencia, año 3, número 5, 73-94.
- Volveras, Ary. (2015). *Propuesta didáctica para la enseñanza de límites de funciones en el grado undécimo de la I.E. el Rosario integrando GeoGebra*. Universidad Nacional de Colombia. Manizales.
- Uni, Viviana & otros. (2011). *Zona Activa Matemáticas 9*. Bogotá: Editorial Norma S.A.
- Uribe, Julio. (2011). *Matemática experimental 11*. Medellín: Uros editores.

A. Anexo: ¿Y si jugamos boliche matemático?

INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE

RESOLUCION: 201850005174 DE ENERO 28 de 2018

DANE 105001026549

NIT: 901159880-7

¿Y si jugamos boliche matemático?

Nombres: _____

Objetivo: Establecer las correlaciones entre dos variables a través de los cambios al interior de cada una de ellas y generar un modelo matemático a partir de esa relación establecida.

Duración: 1 hora.

Materiales: Computador por parejas.

Juego Boliche Matemático.

Hoja de trabajo.

Lápiz.

Situación 1:

1. Instrucciones:

- Ingresas al juego Boliche Matemático, dale clic a continuar, recuerda que debes usar la barra espaciadora para lanzar la bola.
- El Jugador 1 lanzará la bola y antes de darle continuar deberá llenar la cantidad de bolos derribados en la siguiente tabla.
- Para sacar el puntaje total, deberá asignarle un punto por cada bolo derribado, asignando un punto por cada bolo azul, 2 puntos por un bolo verde, 3 puntos por un bolo amarillo y 4 puntos por un bolo naranja.
- Luego de llenar la tabla en la hoja de trabajo, debe completar la tabla de puntos que aparece en la pantalla, tabla que es igual a la que tiene en la hoja de trabajo.
- Finalmente, dará clic a continuar y seguirá el Jugador 2 que seguirá las mismas instrucciones.

Jugador 1	Bolos Azules	Bolos Verdes	Bolos Amarillos	Bolos Naranjas	Puntaje Total
Partida N°1					
Partida N°2					
Partida N°3					
Partida N°4					

Jugador 2	Bolos Azules	Bolos Verdes	Bolos Amarillos	Bolos Naranjas	Puntaje Total
Partida N°1					
Partida N°2					
Partida N°3					
Partida N°4					

Elaborado por: Tossa

INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCION: 201850005174 DE ENERO 28 de 2018
DANE 105001026549
NIT: 901159880-7

¿Y si jugamos boliche matemático?

2. Responde las siguientes preguntas:

- Si tu oponente quiere obtener 18 puntos en una partida, ¿Cuántos bolos debe derribar?, ¿Crees que existen diferentes combinaciones para obtener 18 puntos en una partida? Justifica tu respuesta.

- ¿Cuál sería la combinación de bolos que se deben derribar para obtener el puntaje máximo?

- Un jugador perdió el registro en la tabla, ayúdale completando la tabla.

Jugador	Bolos Azules	Bolos Verdes	Bolos Amarillos	Bolos Naranjas	Puntaje Total
Partida N°1	0	2	5	0	
Partida N°2	9	0	0		73
Partida N°3	1		0	0	41

- Escribe un modelo matemático que permita calcular el puntaje obtenido para cualquier cantidad de bolos verdes derribados (para 4 bolos, 26 bolos, 230 bolos, 1358 bolos, 10569 bolos, en general para cualquier cantidad de bolos derribados).

Elaborado por: Tossa

B. Anexo: Derribar bolos se vuelve una recta.

INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCION: 201650005174 DE ENERO 26 de 2016
DANE 105001026540
NIT: 901159880-7

Derribar bolos se vuelve una recta

Nombres: _____

Objetivo: Identificar la covariación entre dos variables con los comportamientos gráficos y numéricos en el que se da la proporcionalidad directa como una particularidad de la función lineal.

Duración: 1 hora.


Materiales: Computador por parejas.
 Excel.
 Hoja de trabajo.
 Lápiz.

Situación 2:

1. En la situación 1 completaste dos tablas, ahora elije una tabla y un color de bolos, y completa las columnas de los bolos con su respectivo puntaje en la siguiente tabla:

Bolos	Puntaje Total

2. De esas tablas arma las parejas ordenadas que se relacionan bajo las dos variables:

3. Abre el programa Excel y en la Hoja1, celda 1A escribe Bolos y en la 1B escribe Puntaje Total, estas son tus dos variables del punto 1, ahora escribe los valores que tienes en tu hoja de trabajo y pásala a Excel de la misma forma, es decir, en cada celda hacia abajo un valor diferente.
4. Luego, selecciona con el cursor dando clic sostenido desde la celda 2A hasta la 5B, y en la barra de menú da clic en insertar/gráficos/dispersión/dispersión con líneas suavizadas y marcadores 
5. Continúa haciendo el mismo procedimiento pero ahora en la Hoja2 para la segunda tabla.

Elaborado por: Tossa

INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCION: 201850005174 DE ENERO 28 de 2018
DANE 105001028549
NIT: 901159880-7

Derribar bojos se vuelve una recta

¡Podrás observar que se formó una línea recta que ha pasado por todos las parejas ordenadas, la muestra de ella son los puntos de intersección que hay sobre la línea recta!

6. Responde las siguientes preguntas:

- Al realizar la gráfica puedes ver que tiende hacia un lugar, ¿Está aumentando o disminuyendo?, ¿Cómo puedes interpretar esto?

- De acuerdo con la gráfica realizada, ¿Es posible hallar más puntajes de los que ya tenía?, ¿Cuáles?, ¿Cree que puede incluir más soluciones posibles a la gráfica realizada antes?, ¿Por qué?

- Toma dos parejas ordenadas cualquiera, a la primer pareja el valor de x (es decir el primer número del paréntesis le vamos a dar el valor de x_1 , y al segundo número le darás el valor de y_1), lo mismo se hará con la segunda pareja ordenada, pero esta vez sus valores serán x_2, y_2 . Ahora tenemos la fórmula $\Delta x = x_2 - x_1$, halla esa relación y luego la relación $\Delta y = y_2 - y_1$. ¿Qué puedes concluir de la relación entre estos dos resultados?

- Realiza el mismo procedimiento para otras cuatro parejas ordenadas diferentes, ¿Qué relación encuentras?

Elaborado por: Tossa

INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCION: 201850005174 DE ENERO 26 de 2018
DANE 105001026549
NIT: 901159880-7

Derribar bolos se vuelve una recta

- En las cuatro parejas anteriores obtuviste resultados para Δx y Δy , realiza la siguiente operación con cada par de resultados: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. ¿Qué observas?, ¿Cómo puedes interpretar este resultado?

- La recta que acabas de construir pasa por el origen de las coordenadas, es decir, por la pareja ordenada $(0, 0)$. ¿Esto qué quiere decir?

- Toda función puede representarse mediante una gráfica en el plano cartesiano, ésta en particular, ¿Qué clase de función establece?

- ¿Qué puedes concluir de las variables bolos y puntaje total en relación con la función que acabas de determinar?

C. Anexo: Subiendo y bajando por la pendiente de una recta.

INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCION: 201950005174 DE ENERO 26 de 2019
DANE 105001026549
NIT: 901159980-7

Subiendo y bajando por la pendiente de la recta

Nombres: _____

Objetivo: Comprender el significado de la pendiente de una recta de forma gráfica.

Duración: 1 hora.

Materiales: Simulación en GeoGebra.

Hoja de trabajo.

Lápiz.

Situación 3:

1. Ingresa al siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/m/Ksk3Dpxh>
2. Responde las siguientes preguntas con relación a lo que observas en la simulación:
 - Cuando se modifica la recta, ¿Qué sucede con el valor de m ?

- Cuando la recta se encuentra en posición horizontal, ¿Cuál es el valor de m ? ¿Cómo puedes interpretar este resultado?

- Cuando la recta se encuentra en posición vertical, ¿Cuál es el valor de m ? ¿Cómo puedes interpretar este resultado?

- ¿Qué elementos varían en la gráfica? ¿Cómo varían?

D. Anexo: Intercambiando razones de bombillas.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCIÓN: 201850005174 DE ENERO 26 de 2018
DANE 105001026540
NIT: 901159880-7

Intercambiando razones de bombillas

Nombres: _____

Objetivo: Utilizar e interpretar la razón de cambio para resolver problemas relacionados con magnitudes.

Duración: 1 hora.

Materiales: Hoja de trabajo.

Lápiz.

Situación 4

En la Institución Educativa Bello Oriente los estudiantes de grado undécimo realizan la media técnica en instalaciones de redes eléctricas, en esta modalidad han adquirido los conocimientos necesarios para generar sus propios ingresos ofreciendo sus servicios a la comunidad, entre ellos existe la instalación de red de la bombilla, la cual tiene un costo de \$20.000.

- Establezca en una tabla de datos cuál es la cantidad de instalaciones de red de bombillas realizadas para los valores recaudados.

Valor recaudado (V)	Instalación de red de bombilla (I)
20.000	
40.000	
60.000	
100.000	
160.000	

- ¿Qué sucede con la variable valor recaudado (V) cuando se realizan muchas instalaciones de red de bombillas (I)?

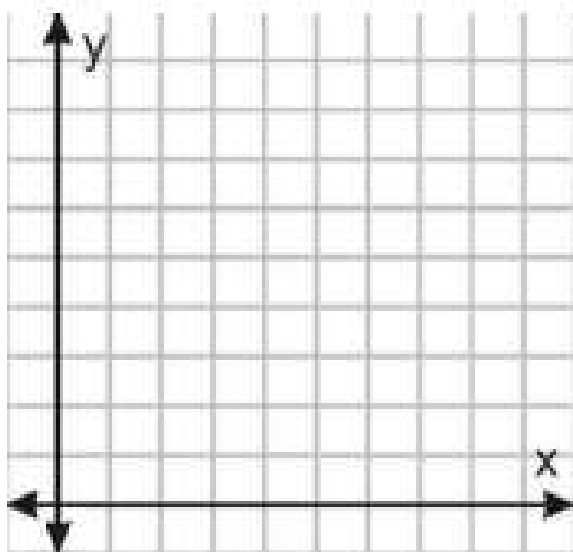
- ¿Cuál es la variable dependiente?

- ¿Cuál es la diferencia en dinero cuando se realiza una instalación y dos instalaciones de red? ¿Cuál es con dos y tres? ¿Cuál es con tres y cuatro?

INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCION: 201850005174 DE ENERO 26 de 2018
DANE 105001026549
NIT: 901159680-7

Intercambiando razones de bombillas

- Grafique los valores obtenidos en la tabla en un plano cartesiano.



- Hallar la pendiente con ayuda de las coordenadas obtenidas.

- Teniendo en cuenta que, I= Cantidad de instalaciones de red de bombillas, V= Valor de Recauda y R= Razón de cambio; calcule la razón de cambio $\frac{\Delta I}{\Delta V} = R$, para cada valor de la tabla:

- ¿Cuál es la relación entre las operaciones de los dos puntos anteriores?

E. Anexo: La pendiente de la recta como razón de cambio.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCIÓN: 201550005174 DE ENERO 26 de 2015
DANE 103001026349
NIT: 901159660-7

La pendiente de la recta como razón de cambio

Nombres: _____

Objetivo: Utilizar e interpretar la razón de cambio para resolver problemas relacionados con magnitudes.

Duración: 2 horas.

Materiales: Hoja de trabajo.

Calculadora.

Lápiz.

Situación 5

En la guía anterior encuentre la relación entre pendiente y la razón de cambio entre las variables valor de recaudo (V) e instalaciones de red de bombillas (I).

- Complete la siguiente tabla:

$f(x) = mx$	$(R)(X)$	Instalaciones de bombillas
$f(20.000) = \frac{1}{20.000}(20.000) = 1$	$(0,0005)(20.000) = 1$	1
$f(40.000) = \frac{1}{20.000}(40.000) =$	$(\quad)(\quad) = 2$	2
$f(\quad) = \frac{1}{20.000}(\quad) = 3$	$(0,0005)(60.000) =$	3
$f(80.000) = \frac{1}{20.000}(80.000) =$	$(0,0005)(80.000) =$	
$f(\quad) = \frac{1}{20.000}(\quad) = 5$	$(\quad)(\quad) = 5$	5
$f(\quad) = \frac{1}{20.000}(\quad) = 6$	$(\quad)(\quad) = 6$	6

Elaborado por: Tossa

INSTITUCIÓN EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCIÓN: 201800005174 DE ENERO 26 de 2018
DANE 103001026349
NIT: 901159650-7

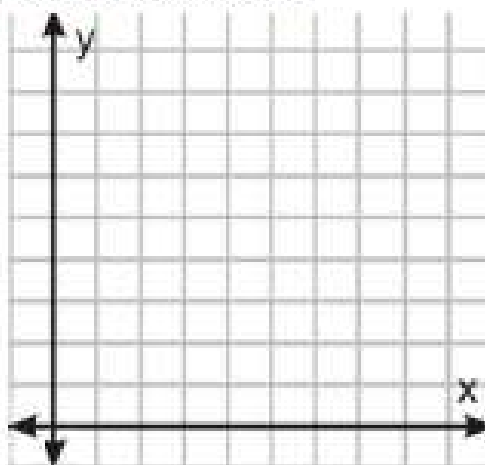
La pendiente de la recta como razón de cambio

- ¿Es posible conocer el valor de 1.200 bombillas a partir de su razón de cambio? Si tu respuesta es afirmativa, calcula dicho valor.

- ¿Qué sucedería si la razón de cambio tuviera un valor diferente?

- Retomando la actividad económica de los estudiantes de la media en instalaciones de redes eléctricas si la razón de cambio fuera 0,000000638; ¿Cuál es el valor recaudado por una instalación?

- Representa la nueva situación en el plano cartesiano.



INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE
 RESOLUCION: 201530005174 DE ENERO 26 de 2015
 DANE 105001026549
 NIT: 901159660-7

La pendiente de la recta como razón de cambio

- Completa la tabla:

$f(x) = mx$	$(R)(X)$	Instalaciones de bombillas
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 1$	$(0,000000638)(\quad) = 1$	1
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 2$	$(0,000000638)(\quad) = 2$	2
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 3$	$(0,000000638)(\quad) = 3$	3
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 4$	$(0,000000638)(\quad) = 4$	4
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 5$	$(0,000000638)(\quad) = 5$	5
$f(\quad) = \frac{1}{\quad}(\quad) = 6$	$(0,000000638)(\quad) = 6$	6

Elaborado por: Tossa

INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCION: 201850005174 DE ENERO 26 de 2018
DANE 105001026549
NIT: 901139660-7

La pendiente de la recta como razón de cambio

- Representa la nueva situación en una tabla de doble entrada.

Valor recaudado (V)	Instalación de red de bombilla (I)
	1
	2
	3
	4
	5
	6

- Representa en un modelo matemático la situación anterior.

F. Anexo: ¿Y si nos acercamos hasta el límite?

INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCION: 201850005174 DE ENERO 26 de 2018
DANE 105001028549
NIT: 901159880-7

¿Y si nos acercamos hasta el límite?

Nombres: _____






Objetivo: Reconocer la pendiente de la recta tangente como razón de cambio de forma gráfica, numérica y algebraica.

Duración: 1 hora y 30 minutos.

Materiales: Hoja de trabajo.
Computador.
Lápiz.

Situación 6

Para la Instalación de una red de bombillas

1. Abre el programa GeoGebra en el siguiente link: <https://www.geogebra.org/>
2. En el entorno de GeoGebra, en la parte superior de la pantalla aparece una casilla llamada entrada $+$ en ella digita la función obtenida, al oprimir Enter, aparecerá en la pantalla la gráfica de la función.
3. En la parte superior aparecen pequeños recuadros, ubica el segundo recuadro  y en él selecciona la opción Punto, haz clic sobre la gráfica en cualquier parte que desees, inmediatamente aparecerá en la gráfica un punto A.
4. Selecciona la opción Tangentes  aparece en el cuarto recuadro, haz un clic sobre el punto A que obtuviste en el paso anterior y haz un segundo clic sobre la función, podrás observar que apareció una recta, esta recta es tangente a la función en ese punto A.
5. Con la opción de Punto en objeto  haz clic en cualquier otra parte de la función, aparecerá el punto B.
6. Con la opción Recta  que aparece en el tercer recuadro, da clic en el punto A y con un segundo clic en el punto B, aparecerá en la gráfica una segunda recta que será secante a la función.
7. Finalmente, selecciona la opción Elige y Mueve  haz clic sobre el punto B y arrastra dando clic sostenido.
8. Responde las siguientes preguntas con relación a lo que observas:
 - ¿Puedes trazar una recta conociendo un solo punto? Explica tu razonamiento.

INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCION: 201850005174 DE ENERO 28 de 2018
DANE 105001028549
NIT: 901159880-7

¿Y si nos acercamos hasta el límite?

- ¿Qué tienen en común la recta tangente y la curva de la función?

- ¿Conociendo un solo punto como el dado en la recta tangente se puede calcular la pendiente de dicha recta? Describe su importancia.

- ¿Qué pasa cuando el punto B se va acercando al punto A?

- Si mueves el punto B hasta colocarlo sobre el punto A ¿Qué puedes concluir sobre las rectas tangente y secante?, ¿Las pendientes que contienen son iguales?, ¿cómo puedes interpretar esto?

INSTITUCION EDUCATIVA BELLO ORIENTE
RESOLUCION: 201850005174 DE ENERO 28 de 2018
DANE 105001028549
NIT: 901159880-7

¿Y si nos acercamos hasta el límite?

- Ahora, como sabes que $y = f(x)$ por notación matemática, entonces si se sustituye y por $f(x)$, ¿Cómo podrías escribir nuevamente la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$?

- Como puedes observar en la gráfica cada vez que el punto B se acerca al punto A, el cambio en el eje horizontal Δx comienza a disminuir, podríamos afirmar que esta disminución cada vez se acerca más a ser cero, ¿Qué pasa si se vuelve cero?

G. Anexo: Pre-test.

Pre Test: La Derivada

Nombre: _____

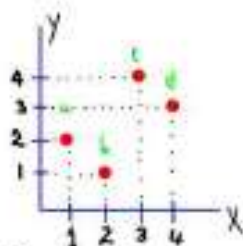
Objetivo: Analizar los conocimientos previos que poseen los estudiantes del grupo a intervenir sobre los conceptos que sirven como base para el concepto de derivada.

Duración: 1 hora.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Este tipo de pregunta se desarrolla en torno a un (1) enunciado y cuatro (4) opciones de respuesta (A, B, C, D). Solo una (1) de estas opciones responde correctamente a la pregunta.

1. Las coordenadas de los puntos a y d corresponden respectivamente a:



- a. (2,1) y (4,3)
- b. (1,2) y (4,3)
- c. (2,1) y (3,4)
- d. (1,2) y (3,4)

2. La pendiente en matemáticas puede definirse en una sola palabra como:

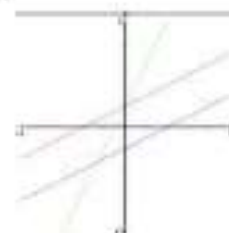
- a. Inclinación
- b. Postergado
- c. Colina
- d. Inconcluso

3. Cuando la pendiente de la recta es cero puede afirmarse:

- i. La recta es constante
- ii. La recta es creciente
- iii. La recta es decreciente

- a. sólo II
- b. Todas son falsas
- c. I, II y III
- d. Solo I

4. De las rectas mostradas en la siguiente figura, la que tiene mayor pendiente es:



- a. Azul
- b. Roja
- c. Verde
- d. No se puede responder

5. La pendiente de la recta cuya ecuación es $y = -x + 6$ es igual a:

- a. -6
- b. -1
- c. 1
- d. 6

6. La pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, -1) y (-2, 2) es:

- a. -3
- b. -1
- c. 1
- d. 3

Elaborado por: Tossa

Pre Test: La Derivada

7. La razón de cambio puede definirse como:

- a. La relación entre dos o más variables que al ocurrir cambios en una o algunas, no determinan cambio(s) en la(s) restante(s)
- b. Es una magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio
- c. Es la división entre dos magnitudes que son constantes
- d. Es la justificación que se da para explicar el cambio

Responde las preguntas 8 y 9 con el siguiente enunciado: "La distancia recorrida por un vehículo y el tiempo transcurrido".

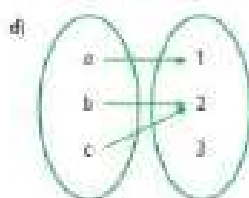
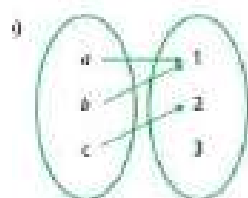
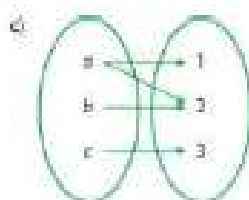
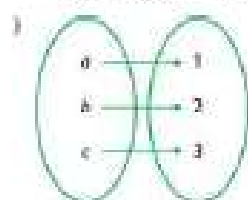
8. Puede afirmarse que son variables:

- a. El recorrido y la velocidad
- b. La velocidad y los segundos.
- c. El tiempo y la distancia
- d. No tiene variables

9. La variable dependiente y la variable independiente respectivamente son:

- a. La distancia y el tiempo
- b. La velocidad y los segundos
- c. El tiempo y la distancia
- d. Los segundos y la velocidad

10. ¿Cuál de las siguientes gráficas no corresponde a una función?



11. Una función puede ser expresada como:

- a. $\int_0^3 2 \, dx = 6$
- b. $\lim_{x \rightarrow -4} |x + 4| = 0$
- c. $f(x) = x^2 - 8$
- d. $x - 3 = 5$

12. La velocidad v del sonido en el aire, expresada en m/s , se relaciona con la temperatura T , expresada en $^{\circ}C$ mediante $v = 0,6T + 331$

Por cada aumento en $20^{\circ}C$ de la temperatura, la velocidad del sonido aumenta.

- a. $0,6 \, m/s$
- b. $331 \, m/s$
- c. $1,2 \, m/s$
- d. $662 \, m/s$

13. Ana Sofia trabaja en un salón de belleza y su salario mensual es de \$400.000 más \$3.500 por cada corte realizado durante el mes. La función que determina el salario mensual de Ana Sofia es:

- a. $C(x) = 3500x + 400000$
- b. $C(x) = -400000x + 3500$
- c. $C(x) = -3500x + 400000$
- d. $C(x) = 400000x + 3500$

H. Anexo: Pos-test

Nombres:

6. Cuando se habla de razón de cambio puede afirmarse:

- i. Es una magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio
- ii. Cambio en eje vertical dividido el cambio en el eje horizontal
- iii. Es lo mismo que la pendiente de una recta

- a. sólo II
- b. Todas son falsas
- c. I, II y III
- d. Solo I

7. De la siguiente tabla, el modelo matemático que se puede abstraer corresponde a:

Ganancia	Productos vendidos
1000	2
3000	6
8000	16
0	0

- a. $g = 500p$
- b. $p = \frac{1000}{2}g$
- c. $g = 500 - p$
- d. $p = \frac{1000}{2} + 2g$

8. La covariación entre dos variables puede evidenciarse en:

- i. Cansancio y cantidad de horas trabajando.
- ii. La distancia que recorre un carro y la cantidad de árboles que pasa.
- iii. Cantidad de dientes de una persona y su edad.

- a. sólo III
- b. Ninguna
- c. I y III
- d. Solo I

9. El símbolo Δx , puede interpretarse como:

- a. Cambio en delta de x .
- b. Cambio Vertical
- c. Simplemente cambio
- d. Cambio horizontal

10. Cuando la pendiente de la recta es cero puede afirmarse:

- i. La recta es constante
- ii. La recta es creciente
- iii. La recta es decreciente

Responde las preguntas 4 y 5 con la siguiente tabla de valores:

- a. sólo II
- b. Todas son falsas
- c. I, II y III
- d. Solo I

11. Cuando la recta está en posición vertical entonces la pendiente es:

- i. -50
- ii. Es creciente
- iii. No puede definirse

- a. sólo I
- b. No está la respuesta
- c. I, II y III
- d. Solo III

12. Si en la instalación de una red de bombillas, se invierten en materiales \$12.000, y la pendiente de la recta sería este valor entonces, la razón de cambio correspondería a:

- a. 18.000
- b. 24.000
- c. 12.000
- d. 36.000

13. En una secante (AB) que se encuentra en un plano cartesiano, cuando el punto A se acerca al punto B sin serlo, el Δx se acerca al valor de:

- a. -1
- b. No se puede acercar
- c. Se necesita visualizar la gráfica
- d. 0

14. La siguiente gráfica presenta dos rectas, la recta azul y la recta verde, reciben respectivamente los nombres de:



- a. Secante y Paralela
- b. Tangente y Perpendicular
- c. Secante y Tangente
- d. Tangente y Paralela

I. Anexo: Representación algebraica.

- Escribe un modelo matemático que permita calcular el puntaje obtenido para cualquier cantidad de bolos verdes derribados (para 4 bolos, 26 bolos, 230 bolos, 1358 bolos, 10569 bolos).

multiplicando dos veces el puntaje sacado $(2)(b)$ cuando b equivale a los bolos derribados.

$$(2) \times (b) = (R)$$

Elaborado por: Tossa

- Escribe un modelo matemático que permita calcular el puntaje obtenido para cualquier cantidad de bolos verdes derribados (para 4 bolos, 26 bolos, 230 bolos, 1358 bolos, 10569 bolos).

$2(x)$ Se multiplicaría 2 por x ,
siendo x la cantidad de bolos verdes
derribados

J. Anexo: Representación lenguaje común.

- Escribe un modelo matemático que permita calcular el puntaje obtenido para cualquier cantidad de bolos verdes derribados (para 4 bolos, 26 bolos, 230 bolos, 1358 bolos, 10569 bolos).

Se debía hacer que multipliquemos el número de bolos
por su puntaje

K. Anexo: Representación aritmética.

- Escribe un modelo matemático que permita calcular el puntaje obtenido para cualquier cantidad de bolos verdes derribados (para 4 bolos, 26 bolos, 230 bolos, 1358 bolos, 10569 bolos).

1 bolos verde = 16 puntos 26 bolos = 52 puntos
 230 bolos = 460 puntos 1358 bolos = 21,716 puntos
 10569 bolos = 21,138

$$4 \times 2 = 16$$

$$26 \times 2 = 52$$

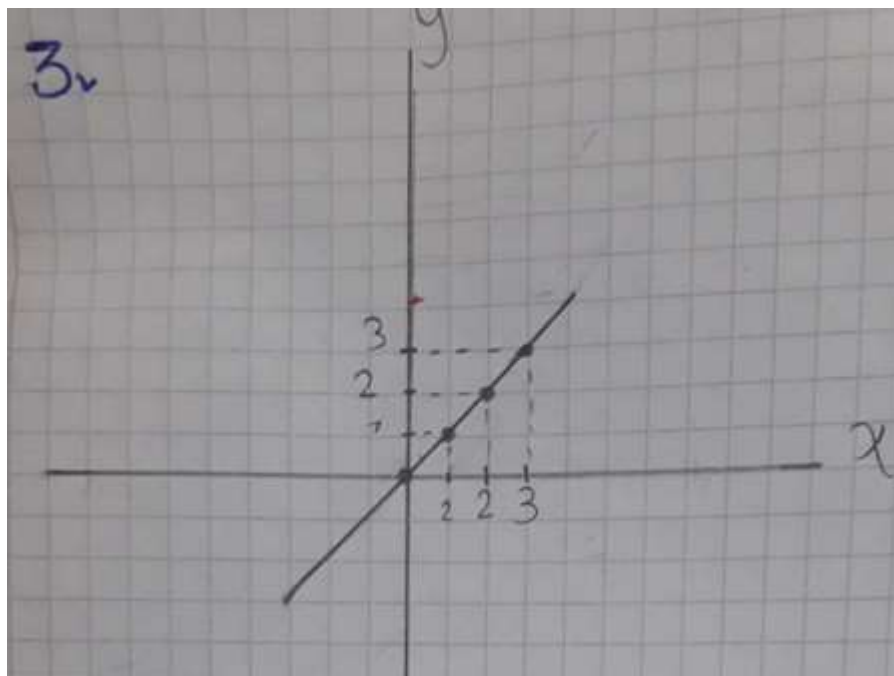
$$230 \times 2 = 460$$

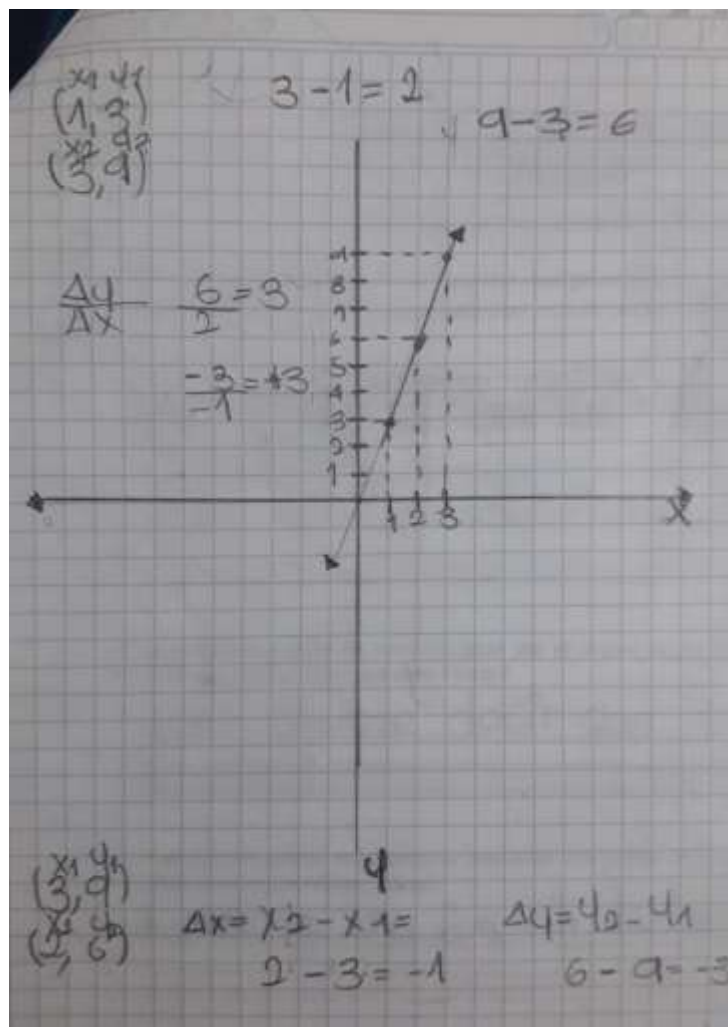
$$1358 \times 2 = 2,716$$

$$10569 \times 2 = 21,138$$

Elaborado por: Tossa

L. Anexo: Conversión del registro tabular al registro gráfico.





M. Anexo: Covariación.

- ¿Qué puedes concluir de las variables bolos y puntaje total en relación con la función que acabas de determinar?

Se puede concluir que todos los bolos y puntaje total se relacionan con la función lineal y son constante

N. Anexo: De la razón de cambio a la pendiente de una recta.

- Retomando la actividad económica de los estudiantes de la media en Instalaciones de redes eléctricas si la razón de cambio fuera 0,000000638; ¿Cuál es el valor recaudado por una instalación?

El precio seguiría siendo el mismo, ya que la razón de cambio no interviene.

- ¿Es posible conocer el valor de 1.200 bombillas a partir de su razón de cambio? Si tu respuesta es afirmativa, calcula dicho valor.

No se puede ya que el valor de la razón de cambio arroja un valor mínimo el cual no se puede multiplicar